

Terminale ~ Spécialité mathématiques

Fonction logarithme népérien

1 Quelques questions pour démarrer

- Résoudre $x^2 = 4$.

Correction

Cette équation possède

- Pour $a > 0$, existe-t-il un nombre positif qui élevé au carré vaut a ?

Correction

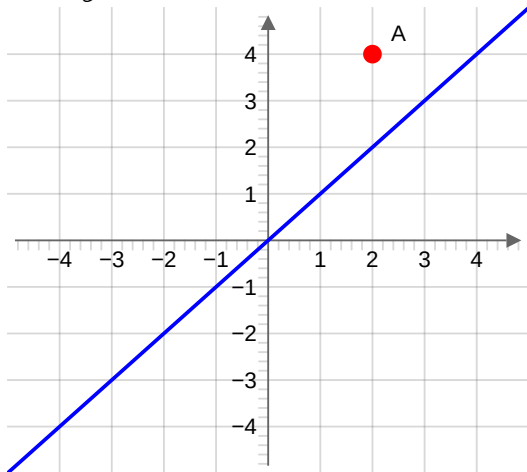
En étudiant la fonction f définie sur

Par définition, si $a > 0$, alors

est la

le théorème de
d'un tel nombre.
de l'équation

- Quel est l'image du point $A(2; 4)$ par la symétrie d'axe $D : y = x$?



Correction

Le point est le symétrique de A par rapport à D .

Retenons que la symétrie d'axe D :

Ainsi, le point $M(x; y)$ a pour image

- Existe-t-il un nombre strictement positif dont l'exponentielle vaut b ?

Correction

Si $b \leq 0$ la réponse est

Si $b > 0$ le théorème de
permet de répondre par

appliqué à la fonction g définie sur \mathbb{R} par

nous

2 Définition et propriétés

2.1 Définition

Définition 1

Pour tout nombre réel b strictement positif, il existe

On appelle ce nombre le

On le note

Exemple 1

-
-

- Pour tout x strictement positif,
- Pour tout x réel,

2.2 Propriétés algébriques

Propriété 1 -- Logarithme népérien d'un produit

Pour tout réel a et b on a :

Preuve

On va calculer et comparer

On a d'une part :

D'autre part :

Or,

D'où,

Propriété 2 -- Logarithme népérien de l'inverse

Pour tout réel a on a :

Preuve

On utilise la propriété précédente :

D'où

Propriété 3 -- Logarithme népérien d'un quotient

Pour tous réels a et b on a :

Preuve

On utilise les deux propriétés précédentes :

Propriété 4 -- Logarithme népérien d'une puissance

Pour tout réel a et tout entier naturel n , on a :

Preuve

Remarquons tout d'abord que :

De même :

En généralisant, pour n assez grand, on a :

Donc,

On répète jusqu'à obtenir :

Remarque 1

Nous aurions pu démontrer directement cette propriété par

Propriété 5 -- Logarithme népérien d'une racine carrée

Pour tout réel a on a :

Preuve

On a :

D'où

3 Fonction logarithme népérien

3.1 Définition

Définition 2

On appelle fonction logarithme népérien, la fonction qui à tout réel x de l'intervalle associe le réel

Remarque 2

- On dit que les fonctions \ln et \exp sont
Pour tout réel $x > 0$ et pour tout réel y , on a :
- Dans un repère orthonormal, les courbes (E) et (L) , qui représentent respectivement les fonctions \exp et \ln , sont

Pour tout réel $x > 0$ et pour tout réel y on a :
si et seulement si

3.2 Dérivabilité et continuité de la fonction \ln

Propriété 6

La fonction \ln est et sur et pour tout réel x strictement positif,

ROC

Preuve

Pour tout réel x , $(\exp(x))' =$
n'admet que des tangentes

donc la courbe représentative de la fonction exponentielle
en chacun de ses points.

Ainsi par symétrie, la courbe représentative de la fonction \ln admet en tout point une tangente
La fonction \ln est donc _____ sur _____ et est donc aussi _____ sur cet intervalle.

Pour le calcul de la dérivée on utilise : $(e^u)' =$ _____ pour dériver l'égalité

Exercice 1

Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes sur $[0; +\infty[$:

1. $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$
2. $g(x) = x \ln(x) - x$
3. $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Correction

1. Pour la fonction f , nous dérivons terme à terme :

$$f'(x) =$$

2. Pour la fonction g nous utilisons la formule de dérivation d'un produit,
pour

$$g'(x) =$$

Ce résultat est intéressant. En effet, nous venons de rencontrer une fonction telle que sa dérivée est la fonction
On dit que la fonction g est une _____ de la fonction \ln .

3. Pour la fonction h nous utilisons la formule de dérivation d'un quotient

$$h'(x) =$$

Exercice 2

Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentant la fonction \ln aux points d'abscisse respective e et 1 .

Correction

Équation de la tangente en e

Équation de la tangente en 1

Propriété 7

La fonction logarithme népérien est

Preuve

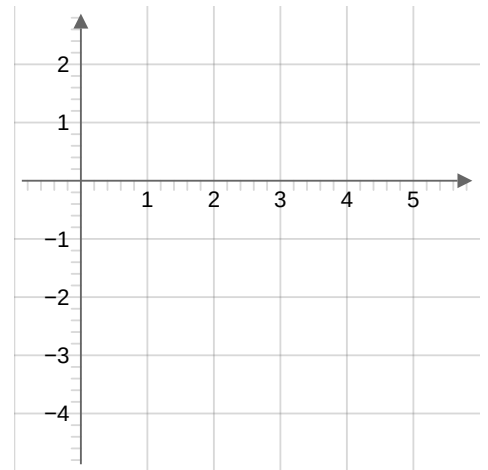
On a vu que pour tout $x > 0$, on a

Propriété 8

- Si $x < 1$ alors
- Si $x > 1$ alors

Remarque 3

Cette propriété (ainsi que la suivante) vient du fait que la fonction \ln est



Propriété 9

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $b > 0$:

Remarque 4

Cette propriété est utile lorsqu'on résoud des

3.3 Fonctions $\ln(u)$

Propriété 10

Soit u une fonction définie sur un intervalle I .

Si u est _____ et _____ sur I alors la fonction _____ est définie et dérivable sur I et :

Exercice 3

Étudier la fonction définie par $f(x) = \ln(-x^2 + 4x + 5)$ sur $] - 1 ; 5[$.

Correction

Si on considère le polynôme p défini par $p(x) =$ _____ on a que son discriminant Δ vaut _____ et ses deux racines sont _____ Ce qui justifie bien que l'ensemble de définition de f est

On a alors que pour tout réel $x \in] - 1 ; 5[$:

Sur $] - 1 ; 5[$ nous avons que $-x^2 + 4x + 5$ _____ De plus

On a donc le tableau de variations suivant pour f :

Il nous reste à justifier les limites aux
 Sur l'intervalle $] - 1 ; 5[$ le polynôme p est positif, donc lorsque x se rapproche de $-\infty$ se
 rapproche de $-\infty$ en étant $\ln(X)$ Or $\ln(X)$ $-x^2 + 4x + 5$ se
 quand X se rapproche de $+\infty$

Ainsi par composition de limites :

Il en est de même lorsque x se rapproche de $+\infty$

3.4 Croissances comparées

Propriété 11 -- Croissances comparées 1

ROC

Preuve

Étude en $+\infty$.

On pose $\ln(x) = y$ donc $x = e^y$

On remarque que :

De plus, on a :

Or, d'après le cours sur la fonction exponentielle,

Donc,

Étude en 0.

On pose $\ln(x) = y$ donc $x = e^y$

On a :

De plus :

Donc d'après le résultat précédent,

Propriété 12 -- Croissances comparées 2

ROC

Pour tout entier $n \geq 1$,

Preuve: La démonstration découle immédiatement de la propriété 11 de croissances comparées et les propriétés opératoires des limites.