

Terminale ~ Spécialité mathématiques

Primitives / Équation différentielles

1 Généralités

Définition 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur intervalle I .

Une $y' + p(x)y = q(x)$ est une équation qui met en relation la variable, la fonction f , ainsi qu'éventuellement ses

Remarque 1

- Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction ou sa dérivée ou sa dérivée seconde
- Généralement, l'inconnue d'une équation différentielle est notée y sa dérivée y' sa dérivée seconde y'' etc. On peut les noter également y ,

Exemple 1

Les deux équations ci-dessous sont des équations différentielles :

- $f' = f$, que l'on peut noter également : $y' = y$ ou encore $y' - y = 0$
- $3xf''(x) - (f(x))^2 = 2$, que l'on peut écrire : $3xy'' - y^2 = 2$ ou $3xy'' - y^2 - 2 = 0$

Définition 2

Soit n un entier naturel. Une équation différentielle d'ordre n est une équation différentielle où la dérivée de plus grand

Exemple 2

- $5y - x^2y' = 0$ est une équation différentielle du 1^{er} ordre
- Pour $\omega \in \mathbb{R}$, $y'' + \omega^2y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2

Définition 3

Toute fonction f qui vérifie une équation différentielle est appelée solution de cette équation. Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer

Exemple 3

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-3x}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = -3y$.

En effet,

Cependant, cette fonction n'est pas la seule solution. Par exemple, la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{-3x} + 1$ est également une solution de cette équation différentielle :

Définition 4

Soit n un entier naturel. On considère une équation différentielle d'ordre n d'inconnue y sur un intervalle I , ainsi qu'un réel $x_0 \in I$.

La donnée de _____ ou d'une des dérivées de y en x_0 (par exemple _____ ou _____ ...)

Exemple 4

La fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(t) = 5e^{2t}$ est la solution de l'équation _____ vérifiant la condition initiale _____

2 Équation différentielle $y' = f$

Définition 5

Soient f et F des fonctions définies sur un intervalle I .
On dit que F est une _____ de f sur I si F est _____ sur I et qu'elle est solution de l'équation différentielle _____

Remarque 2

En d'autres termes, F est une primitive de f sur I si _____

Exemple 5

La fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto 2x$ est une primitive sur _____

Exercice 1

Trouver des solutions définies sur \mathbb{R} aux équations différentielles suivantes :

1. $y' = x$
2. $y' = x^2 + 1$

Correction

1. _____ est une solution de cette équation.

La fonction _____ est également une solution.

2. _____ est solution de l'équation.

Propriété 1

Toute fonction _____ sur un intervalle admet des _____ sur cette intervalle

Propriété 2

Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I .
Les primitives de f _____

Preuve

Soient F et G _____ de f sur I .
La fonction $F - G$ est _____ sur I et sa dérivée vérifie :

Ainsi $F - G$ est _____ sur I et les primitives de f _____ bien d'une constante.

Propriété 3

Soient f une fonction définie sur I et F une primitive de f sur I .
Les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme _____ pour tout $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 6

Les primitives de $x \mapsto x$ sur \mathbb{R} sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par

avec

Remarque 3

Pour déterminer des primitives, il sera utile de connaître les tableaux ci-dessous. Les deux dernières lignes seront vues dans un prochain chapitre.

Fonction f	Primitive F	Domaine de définition
k constante		
x		
$x^n, n \in \mathbb{N}$		
$\frac{1}{x^2}$		
$\frac{1}{x^3}$		
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$		
$\frac{1}{\sqrt{x}}$		
$\frac{1}{x}$		
$\exp(x)$		
$\cos(x)$		
$\sin(x)$		

Soient u et v deux fonctions dérivables.

Fonction	Primitive
$u' \times (v' \circ u)$	
$u' u^n, n \in \mathbb{N}$	
$\frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}$	

Fonction	Primitive
$\frac{u'}{u}$	
$u' e^u$	
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	

Fonction	Primitive
$u' \cos(u)$	
$u' \sin(u)$	

Exercice 2

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de f .

2. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$

Correction

1. La fonction f est de la forme avec :

De plus, ainsi, la fonction F définie sur \mathbb{R} par est

2. L'expression $\frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ est de la forme avec et

Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions y définies sur \mathbb{R} par

3 Équation différentielles $y' = ay$

Propriété 4

ROC

On considère l'équation différentielle $(E) :$ avec

1. Les solutions de (E) sont les définies sur \mathbb{R} par :

2. Étant donné deux réels x_0 et y_0 , il existe une solution de (E) vérifiant la condition initiale

Cette condition permet de déterminer la constante de

Preuve

1. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par où C est un réel.

Alors, Puisque $f'(x) =$ pour tout réel x , f est bien de l'équation différentielle

Reciproquement, soit f une de l'équation différentielle (E) et soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

La fonction g est sur \mathbb{R} et Puisque f est solution de (E) , pour tout réel x et ainsi :

La fonction g est il existe donc un réel C tel que c'est-à-dire :

Puisque e^{-ax} est différent de pour tout réel x , on obtient:

2. Une solution de (E) est de la forme

De plus, donc et c'est-à-dire

Ainsi, la fonction définie pour tout réel x par

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = 8y$, puis déterminer la solution vérifiant $y(-1) = 1$.

Correction

Les solutions de (E) sont toutes les _____ définies sur _____ par _____

Pour la solution particulière vérifiant _____ on a :

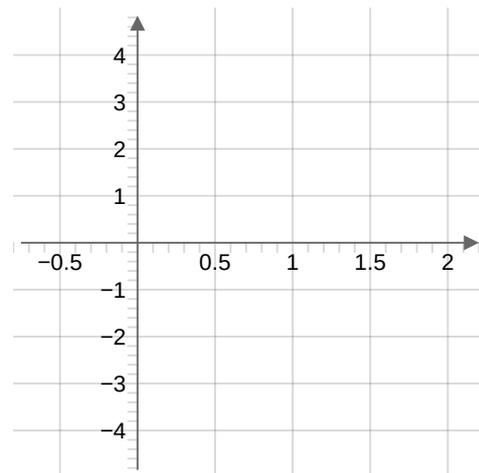
Ainsi la solution cherchée est _____

Exemple 7

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -2y$, sont les fonctions _____

On peut observer leur courbe dans le graphique ci-

dessous.



Propriété 5

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ avec $a \neq 0$. On note y_1 et y_2 deux solutions de (E) et k un réel.

La fonction somme $y_1 + y_2$ et la fonction $y_1 + y_2 + k$ sont également des solutions de (E) .

4 Équation différentielles $y' = ay + b$

Propriété 6

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = ay + b$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Les solutions de (E) sont les _____ définies sur _____ par :
_____ où C est une constante réelle.

2. Étant donné deux réels x_0 et y_0 , il existe une unique solution de (E) vérifiant la condition $y(x_0) = y_0$.

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y + 2$ avec $y(0) = 1$.

Correction

Les solutions de l'équation sont de la forme _____

De plus, _____ donc _____ c'est-à-dire _____

La solution cherchée est donc la fonction définie sur _____ par _____

5 Guide de résolution des équations différentielles du type $y' = ay + f$

Pour résoudre une équation différentielle (E) de la forme _____ l'énoncé nous guide en respectant les étapes suivantes:

1. On cherche une solution _____ φ (en pratique, il suffit de vérifier que la fonction indiquée par l'énoncé convient);
2. On montre que y est solution de (E)
3. On résout l'équation homogène
4. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) s'écrivent alors :

Exercice 5

Soit (E) l'équation différentielle : $y' = 2y + x^2$

1. Montrer que la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une solution particulière de (E) .
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2y$.
3. Résoudre alors l'équation (E) .

Correction

1. Pour tout réel x ,

De plus :

La fonction g est bien

- 2.

- 3.

Les solutions de l'équation $y' = 2y$ sont de la forme

Donc, _____ est solution de _____ si et seulement si _____
c'est-à-dire tel que

Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur \mathbb{R} par :