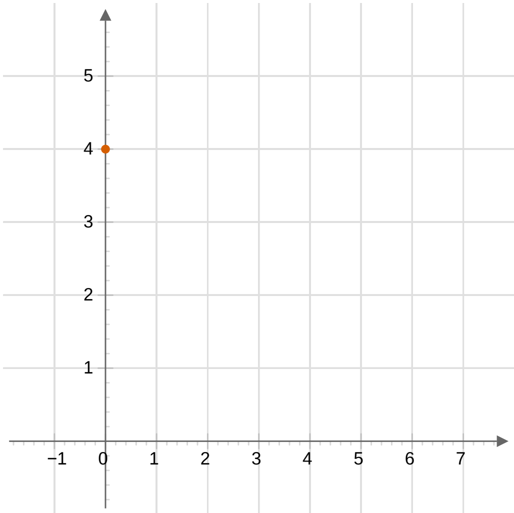
DM ~ Méthode d'Euler

On s'intéresse dans ce devoir à une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
Cette fonction vérifie $f(0) = 4$ et pour chacun des point de sa courbe $\mathscr{C}$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ est égale à l'opposé de la moitié de son ordonnée.

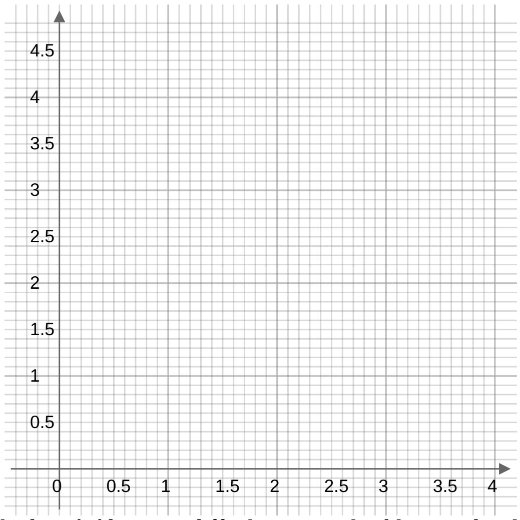
1. Pour tout réel x trouver une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$.
2. En partant du principe que localement une courbe et sa tangente sont très proche, on admet qu'étant donné un point M de $\mathscr{C}$ et la tangente correspondante T, un point de T proche de M est aussi proche de $\mathscr{C}$.
   Dans le graphique ci-dessous on a tracé le point $(0\,;4)$ de $\mathscr{C}$.
   - Cliquer sur ce point pour faire apparaître la tangente à $\mathscr{C}$ associée. On remarquera que son coefficient directeur vaut bien -2 qui est la moitié de l'opposé de 4.
   - Cliquer ensuite sur un point de cette tangente qui est proche du point de coordonnées $(0\,;4)$, tout en étant à sa droite.
     On obtient alors un point qui est proche d'un point de $\mathscr{C}$.
   - Répéter l'opération une dizaine de fois avec chaque nouveau point créé, en allant jusqu'à la droite du graphique pour obtenir une approximation de $\mathscr{C}$.
   - Repartir du point initial $(0\,;4)$ mais en allant cette fois-ci vers la gauche pour compléter l'approximation de $\mathscr{C}$.
   - Imprimer ou envoyer le graphique.



3. À partir du graphique précédent, conjecturer la famille de fonction à laquelle semble appartenir f.
4. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_0 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   b. Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse $0,5$ de T_0 et expliquer pourquoi ce nombre peut être considéré comme une valeur approchée de $f(0,5)$.
   c. Déterminer alors, en utilisant cette valeur approchée de $f(0,5)$, l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $0,5$.
   d. En déduire selon la même méthode une valeur approchée de $f(1)$.
   e. Compléter le tableau suivant :

x_0	Équation de la tangente en x_0	Valeur approchée de $f(x_0 + 0,5)$
0		
$0,5$		
1		
$1,5$		
2		
$2,5$		
3		
$3,5$		
4		

f. Placer les points obtenus dans le tableau précédent dans le repère ci-dessous :



5. Pour obtenir un plus grand nombre de points, la méthode précédente est difficilement applicable avec de tels calculs à la main. On utilise donc un algorithme en Python.
   On cherche à établir tout d'abord des résultats qui nous serons utiles pour cet algorithme.

   a. On considère un point $M(t\,;f(t))$ de $\mathscr{C}$. Montrer que l'équation réduite de la tangente T_t à $\mathscr{C}$ en M est : $y=-\dfrac{1}{2}f(t)(x-t)+f(t)$.

   b. Déterminer une expression simple des coordonnées du point de T_t d'abscisse $t+0,1$.

   c. On applique dans cette question la méthode de la question 4 pour un pas de $0,1$ à la place de $0,5$.
   En utilisant la question précédente, compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche la liste de toutes les coordonnées de tous les points obtenus par cette méthode entre 0 et 4.

```
x = 0
y = 4
L = [ [x,y] ]
while x < 4:
    x = x+0.1
    y = 
    L.append([x,y])
print( )
```

   d. L'algorithme suivant, n'est pas écrit en Python, mais permet de tracer les points obtenus par la méthode précédente.
   Compléter le pour obtenir le graphique associé.

```
Xmin = -0.5
Xmax = 4.2
Ymin = -0.5
Ymax = 5
traceG()
traceX()
traceY()
couleur = bleu
x = 0
y = 4
point([x,y])
while( x < 4 ){
    x = x + 0.1
    y = 
    point([x,y])
}
```

   e. Modifier cet algorithme pour obtenir plus d'une centaine de points sur $[0\,;10]$. On pensera à modifier, entre autre, la ligne n°2.

```
1  Xmin = -0.5
2  Xmax = 4.2
3  Ymin = -0.5
4  Ymax = 5
5  traceG()
6  traceX()
7  traceY()
8  couleur = bleu
9  trait = 0.2
10 x = 0
11 y = 4
12 point([x,y])
13 while( x < 4 ){
14     x = x + 0.1
15     y = 
16     point([x,y])
17 }
```