Terminale ~ Spécialité mathématique
Suites numériques (1)

1 Démonstration par récurrence

Complétons et observons les résultats du tableau ci-dessous :

Sommes des nombres impairs	Est-ce un carré ?
1	
$1+3$	
$1+3+5$	
$1+3+5+7$	

Pour quels entiers n la propriété suivante est-elle vraie ?

$$P_n : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

Correction

La somme commençant à $k=1$, la formule n'a de sens qu'à partir de $n=1$. Regardons donc si est vraie.

Pour $n=2$:

On pourrait vérifier encore pour quelques entiers que la propriété est vraie, cependant ceci ne constitue pas . Un calcul direct serait également assez compliqué, surtout avec un sigma. Pour démontrer que cette égalité est vraie pour tout entier $n \geq 1$, nous allons découvrir une nouvelle façon de raisonner.

Nous allons démontrer que cette propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$ en appliquant

Propriété 1 -- *Principe de récurrence*

On veut montrer qu'une propriété P_n est vraie pour entier $n \geq n_0$, avec n_0 le premier entier où la propriété est (généralement $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$).

○ **Initialisation**

○ **Hérédité**

○ **Conclusion**

Exemple 1

Avant de démontrer que notre propriété P_n est vraie pour tout entier $n \geq 1$, essayons de mieux appréhender ce principe de récurrence. Pour cela faisons une analogie avec des insectes.
Prenons donc l'exemple d'une rangée d'insectes, alignés du premier insecte au dernier, celui-ci pouvant être infiniment loin, et mettons-les dans un contexte d'épidémie :
Si l'un est malade il transmet la maladie de manière certaine à son voisin de droite, et seulement à celui-ci.
On peut alors se poser la question s'ils vont tous être malades ?
La réponse est évidemment si le premier insecte Si c'est le $10^{\text{ème}}$ insecte qui est le premier à tomber malade, les suivants le seront, mais pas ceux d'avant.
On peut dire que l'insecte numéro transmet la maladie à l'insecte numéro Ceci est un processus de transmission (d'hérédité), et dès que celui-ci est initialisé, c'est-à-dire) si insecte numéro n_0 est malade, alors les suivants le seront également.

Montrons maintenant, par récurrence, que : $P_n : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ est vraie

○ **Initialisation**

○ **Hérédité**

Ainsi, nous avons bien que

○ **Conclusion**

2 Définitions

Définition 1 -- *Suite numérique*

Une suite numérique (u_n) est dont la variable est

$$u_n : \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n, \text{ pour } n \geq n_0. \end{array}$$

u_{n_0} est

u_n de la suite.

Il existe plusieurs procédés pour définir une suite, nous en verrons deux :

○

○

Exemple 2

On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n + \dfrac{2}{n+1}$.

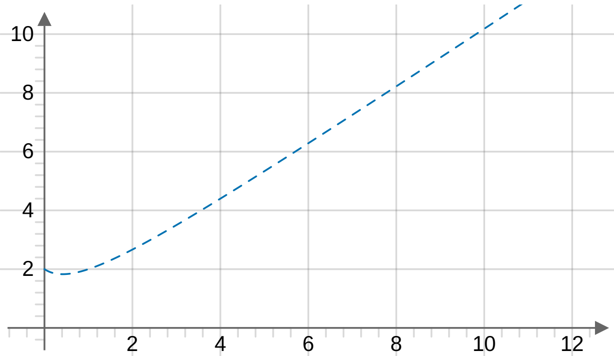
On a que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = f(n)$, avec $f(x) = x + \dfrac{2}{x+1}$.

Calculer : v_0, v_1 et v_{100}.

Correction

Remarque 1

On peut représenter les premiers termes d'une suite à l'aide d'un nuage de points où les abscisses représentent les nombres n et les ordonnées les nombres u_n correspondants.



Exemple 3

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0,2$ et $u_n = \dfrac{3u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 4}$.

Ici, pour tout $n \geq 1$, $u_n = g(u_{n-1})$, avec $g(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$.

Trouver des valeurs approchées de u_1, u_2, u_3 et u_{100}.

Correction

Pour calculer u_{100} cela va être un peu long, puisque nous allons devoir connaître u_{99}, mais pour calculer celui-ci il va nous falloir u_{98}, etc.

On utilise alors l'algorithme ci-contre. Après exécution, on trouve la valeur approchée suivante :

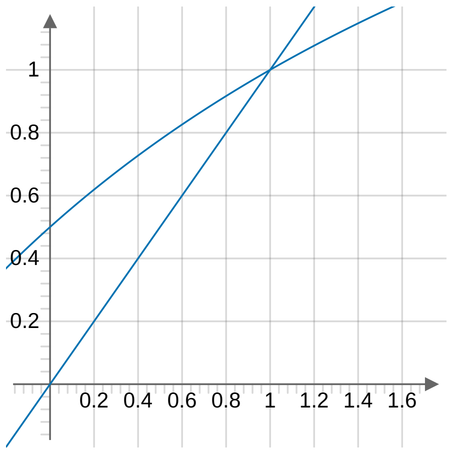
Remarque 2

Étant donnée une suite (u_n) définie par récurrence à l'aide de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on représente les premiers termes de la suite dans un repère du plan à l'aide la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentative de la fonction f. On notera cette dernière $\mathcal{C}$.

On place u_0 sur l'axe des abscisses, et puisque $u_1 = f(u_0)$ (c'est-à-dire que u_1 est l'image de u_0 par f), on peut visualiser u_1 sur l'axe des ordonnées à l'aide de $\mathcal{C}$.

Il n'est cependant pas pratique d'avoir u_0 sur l'axe des abscisses et u_1 sur l'axe des ordonnées. On utilise donc la droite d'équation (la droite où les points ont même abscisse et ordonnée) pour « ramener » u_1 sur l'axe des abscisses.

On construit ensuite u_2 à partir de u_1 de la même façon, et ainsi de suite pour les termes suivants.



Définition 2 -- *Suite majorée*

Une suite numérique (u_n) est lorsque ses termes sont à une même appelée

Ainsi,

Exemple 4

- La suite $(u_n) = 1 - n$ est majorée par
- La suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = n + 1$,

Définition 3 -- *Suite minorée*

Une suite numérique (u_n) est lorsque ses termes sont à une même appelée Ainsi,

Définition 4 -- *Suite bornée*

Une suite numérique (u_n) est lorsqu'elle est à la fois Ainsi,

Exemple 5

La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2 + 1}$ est bornée. En effet,

Définition 5 -- *Sens de variation d'une suite*

Soit (u_n) une suite numérique.

- La suite (u_n) est si pour tout entier n,
- La suite (u_n) est si pour tout entier n,
- La suite (u_n) est si il existe tel que pour tout entier n,

Remarque 3

Lorsqu'on ne connaît pas a priori le sens de variation d'une suite (u_n) il est alors plus pratique d'étudier le signe de . En effet :

Remarque 4

Une suite peut-être monotone

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence sur n, que pour tout entier n, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.
2. Que peut-on en conclure pour la suite (u_n) ?

Correction

1. **Initialisation**
   On a $u_0 =$ et $u_1 =$
   Ainsi, on a bien
   La propriété est bien

   Hérédité
   On suppose que pour on a :

   On cherche alors à montrer que :

   D'après l'hypothèse de on a :

   Conclusion
   D'après le pour entier n on a :

2. L'encadrement précédent nous permet d'affirmer que (u_n) est par 0, par 2.
   Elle est de plus puisque pour entier n,