Terminale ~ Spécialité mathématique
Suites numériques (2)

1 Limite d'une suite

1.1 Quelques exemples

On considère les trois suites ci-dessous :

○ $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

○ $v_n = n^2$

○ $w_n = (-1)^n$

Compléter le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n								
v_n								
w_n								

Remarque 1

Nous pouvons décrire le comportement de ces suites en émettant les conjectures suivantes :

○ (u_n) semble pouvoir être du nombre 3.

○ (v_n) semble pouvoir être

○ (w_n) prend

On peut donc dire que :

○ (u_n) semble possèder

○ (v_n) semble

○ (w_n) lorsque n grandit.

De manière, plus synthétique, on pourrait noter :

Il n'y a aucune écriture pour (w_n) car cette suite ne possède pas de limite.

1.2 Définitions

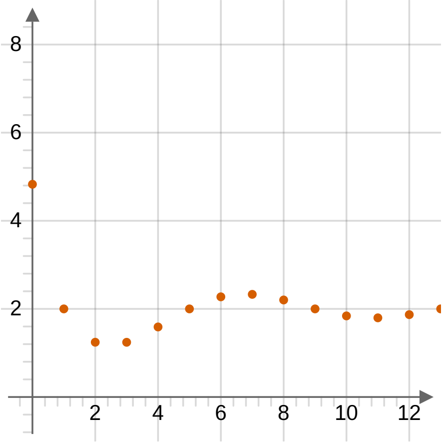
Définition 1

On dit qu'une suite (u_n)

Remarque 2

On note alors :

Sur le graphique ci-contre, nous pouvons voir qu'à partir d'un certain rang tous les termes de la suite semblent être dans l'intervalle délimitant la zone coloriée aussi petite soit elle.



Remarque 3

Les suites non convergentes sont dites et certaines suites divergent vers

Définition 2 -- *Suite divergent vers $+\infty$*

Une suite (u_n)

Remarque 4

On note alors :

1.3 Exemples

Exemple 1

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} =$

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_n = n^3 + 1$ et A un nombre réel.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. Écrire un algorithme Python comportant une fonction qui retourne le premier rang à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grand que A.

Correction

1. La fonction f définie par $f(x) = x^3 + 1$ est

2.

1.4 Opération sur les limites

Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n$						

Remarque 5

« f.i » signifie et qu'il faut fournir des efforts supplémentaires pour donner la limite. En effet lorsqu'une suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et une suite (v_n) vers $-\infty$, on ne peut connaître sans calculs préliminaires la limite de (u_n+v_n).

Voici plusieurs situations :

- Pour tout entier n, on pose $u_n=n^2+1$ et $v_n=-n^2$. On a bien :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$
  Par ailleurs : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n=$
- Pour tout entier n, on pose $u_n=n^2+n$ et $v_n=-n^2$. On a bien :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$
  Dans ce cas : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n$
- Pour tout entier n, on pose $u_n=n^2$ et $v_n=-n^2-n$. On a bien :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$
  Et enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n$

Nous voyons donc bien que la suite (u_n+v_n) peut avoir n'importe quelle limite sous ses hypothèses. Il sera donc nécessaire de déterminer la limite dans cette situation après quelques calculs.

Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell\neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n\times v_n$				

Remarque 6

Pour le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\infty$, on ne précise pas dans ce tableau si ce sont des $+$ ou $-$ l'infini. La limite du produit divergera vers ∞ en appliquant
On utilise cette règle dans l'exemple suivant :

Remarque 7

$\lim\limits_{n\to+\infty}(3-n^2)(-4n^3-n+1)=$

En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-n^2=$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -4n^3-n+1=$

On obtient le résultat en appliquant la règle sur de limites précédente.

Limite d'un quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	∞	ℓ'	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$				

Exemple 2

On cherche à déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{3+\sqrt{n}}$.

On a: $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\sqrt{n}=$ et donc d'après la règle sur les de limites on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{3+\sqrt{n}}=$

1.5 Limites et comparaisons

Propriété 1 ROC

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que à partir d'un certain rang :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$

Preuve

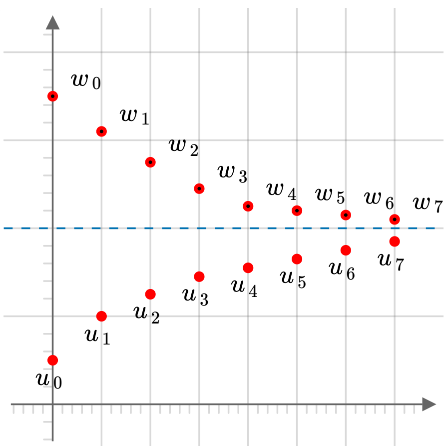
On considère un intervalle ouvert de la forme

On cherche à démontrer qu'à partir d'un certain rang, .

Propriété 2 -- *Encadrement des limites*

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que à partir d'un certain rang :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$



Remarque 8

Dans le graphique précédent nous pouvons observer deux suites encadrer une troisième. Et puisque les deux premières convergent vers ℓ, la suite comprise entre les deux se trouve coincée et doit, elle aussi, converger vers ℓ.
Cette propriété est également connue sous le nom imagé de "théorème des gendarmes", ou plus prosaïquement théorème d'encadrement des limites.

Exemple 3

Déterminons la limite de la suite (u_n), définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Pour tout entier $n \geq 1$:

Or, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n} =$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} =$

Ainsi, d'après le théorème

2 Comportement des suites arithmétiques et géométriques

Propriété 3 -- *Comportement des suites arithmétiques*

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

○ si alors (u_n) est et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$

○ si alors (u_n) est et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$

○ si alors (u_n) est et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$

Preuve
On sait que : u_{n+1} donc
Par ailleurs, $u_n =$
Ainsi, si $r > 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times r =$ et, si $r < 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times r =$

Propriété 4 -- *Comportement des suites géométriques de raison $q > 1$* ROC

Soit (u_n) une suite géométrique de raison

○ si alors (u_n) est et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$

○ si alors (u_n) est et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$

Pour démontrer cette propriété nous aurons besoin du résultat suivant appelé **inégalité de Bernoulli** :

Propriété 5 -- *Lemme -- Inégalité de Bernoulli* ROC

Soit a un nombre réel . Alors pour tout entier n :

Preuve du lemme
Procédons par récurrence sur n.

Initialisation

Hérédité

Le passage de l'avant-dernière à la dernière ligne se justifie par le fait qu'un nombre à qui l'on retire une quantité positive (ici na^2) devient

Conclusion

Preuve de la propriété sur les suites géométriques de raison $q > 1$
On note (u_n) une telle suite, et nous avons :

Ainsi, la raison étant en particulier positive, tous les termes de la suite seront
Et puisque
La suite (u_n) est bien

Pour déterminer la limite de (u_n), il nous suffit de faire la remarque suivante :

Or, pour tout entier n, u_n . C'est-à-dire :

On a, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na =$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$

Si , $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$

Propriété 6 -- *Comportement des suites géométriques de raison* $q \in]0;1[$

Soit (u_n) une suite géométrique de raison

○

○

Exemple 4

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 3,1^n =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} -3 \times (0,8)^n =$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,2)^n =$ à l'aide du théorème d'encadrement .
- La suite géométrique (u_n) de premier terme 1 et de raison $-2,6$ est telle que $u_n =$

Remarque 9

On peut synthétiser les résultats précédents dans les tableaux ci-dessous :

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$				

	$q < 0$	$0 \leq q < 1$	$q > 1$
sens de variation de (q^n)			

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$ et $u_0 > 0$	$q > 1$ et $u_0 < 0$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_0 q^n$					

	$q < 0$	$0 \leq q < 1$ et $u_0 > 0$	$0 \leq q < 1$ et $u_0 < 0$	$q > 1$ et $u_0 > 0$	$q > 1$ et $u_0 < 0$
sens de variation de $(u_0 q^n)$					

3 Convergence et monotonie

Propriété 7 -- *Suite croissante non majorée* ROC

Propriété 8 -- *Suite décroissante non minorée*

Preuve de la propriété 8

Preuve de la propriété 9

Propriété 9 -- *Convergence monotone*

Propriété 10 -- *Convergence monotone*

Preuve de la propriété 10

Soit (u_n) une suite

Toute suite majorée possède une nous admettrons ici qu'il en existe

On veut démontrer que (u_n) converge vers

Soit I un intervalle contenant On cherche à montrer qu'à partir d'un certain tous les termes de la suite sont

Or, puisque I est et qu'il contient M, il existe un réel

Propriété 11 -- *Suite croissante et convergente*

Toute suite (u_n) convergeant vérifie :

Preuve

Nous allons raisonner par en supposant le de ce que nous voulons démontrer, et en arrivant ensuite à