

Terminale ~ Spécialité mathématique

Dérivation

1 Nombre dérivé - Fonction dérivée : définition

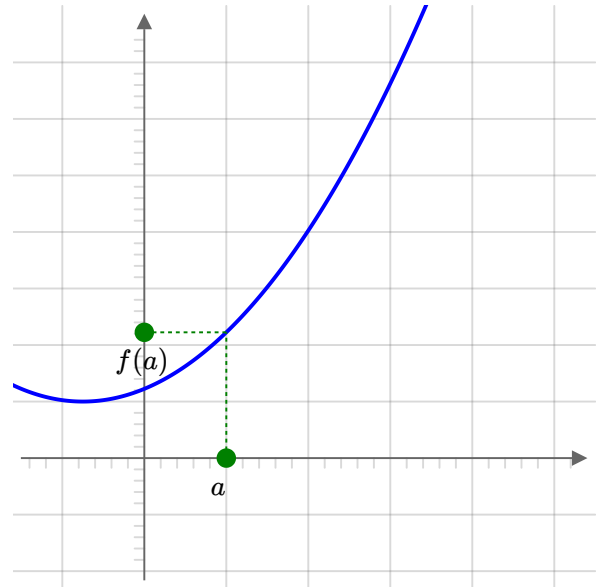
Soit f une fonction définie sur un intervalle I , contenant les nombres a et $a + h$ avec $h \neq 0$

Le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ est :

Ou encore en posant $x = a + h$, le taux de variation vaut :

Graphiquement, ce taux correspond au
sécante.

de la



Remarque 1

Lorsque le nombre h se rapproche de 0 , la corde se rapproche d'une

Définition 1 -- Nombre dérivé

La fonction f est dite $\text{dérivable en } a$ si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. Dans ce cas cette limite s'appelle le **nombre dérivé** de f en a . On le note $f'(a)$ c'est-à-dire :

ou encore,

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{x}$.

1. Démontrer que g est dérivable en tout $a > 0$.
2. Démontrer que g n'est pas dérivable en 0 .

Correction

1.

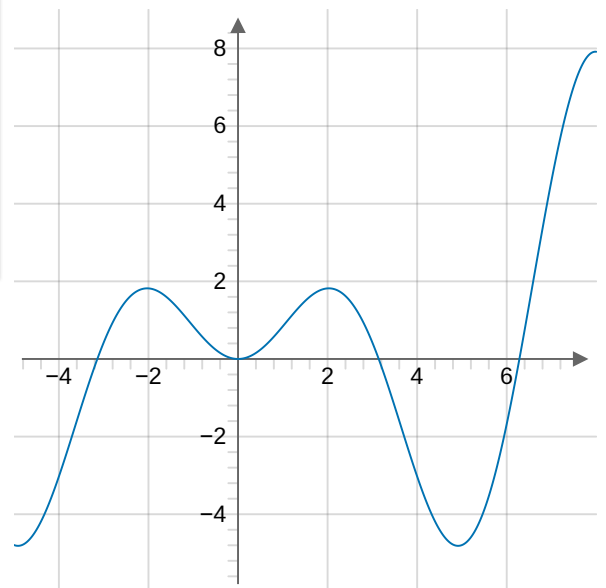
2.

Définition 2 -- *Fonction dérivable*

On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si elle est dérivable en tout point de I .
On peut alors définir une fonction qui à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.
On l'appelle la dérivée de la fonction f sur I et on la note f' .

Définition 3 -- *Tangente à une courbe*

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère. On considère le point $A(a, f(a))$. Si le nombre $f'(a)$ est défini, on a alors que, la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.



Propriété 1 -- *Équation de la tangente*

Soit f une fonction dérivable en a . L'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a , est donnée par :

Preuve.

On sait tout d'abord que l'équation de la tangente est de la forme :
 $y - f(a) = f'(a)(x - a) + b$
utilisons le fait que le point $A(a, f(a))$ appartient à la droite. Ainsi,

où b reste à déterminer. Pour cela

L'équation de la tangente est donc de la forme :

Exercice 2

Trouver l'équation de la tangente en 4 à la courbe de la fonction g , définie par $g(x) = \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Correction

Nous savons que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $g'(x) =$

L'équation de la tangente à la courbe de g en 4 est donc :

2 Calcul de la fonction dérivée

2.1 Dérivée des fonctions usuelles

Lors de l'exercice 1, nous avons en fait déterminé l'expression de la fonction dérivée de la fonction racine carrée.

Pour toutes les fonctions usuelles des calculs de limites similaires nous fournissent leur fonction dérivée. Nous en donnons ici directement les résultats.

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Intervalle de dérivabilité |
|--------------------------------|---------|----------------------------|
| c (constante) | | |
| x | | |
| x^n ($n \in \mathbb{N}^*$) | | |
| $\frac{1}{x}$ | | |
| $\frac{1}{x^n}$ | | |
| \sqrt{x} | | |
| e^x | | |

Exercice 3

Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Correction

Nous appliquons la formule du tableau donnant la dérivée de $\frac{1}{x^n}$ avec

Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

2.2 Dérivation et opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I . Alors $u + v$, $k \times u$, où k est une constante multiplicative, et $u \times v$ sont dérivables sur I .

Si de plus v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I .

Propriété 2

Remarque 2

Les fonctions polynômes sont dérivables sur \mathbb{R} . Les fonctions rationnelles (quotient de deux polynômes) sont dérivables sur chaque de leur ensemble de définition.

2.3 Fonction composée et dérivation

Définition 4 -- Fonction composée

Soit v est une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I , $u(x)$ appartient à J .

On appelle fonction composée $v \circ u$ la fonction f définie pour tout x appartenant à I par :

Propriété 3

Soit v est une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I , $u(x)$ appartient à J . On a alors :

C'est-à-dire, pour tout réel $x \in I$ tel que $u(x) \in J$:

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x^2}$. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

Correction

f est de la forme _____ avec :

$$v(x) \quad \text{et} \quad u(x)$$

$$v'(x) \quad \text{et} \quad u'(x)$$

Ainsi, pour tous réels x :

Propriété 4

Soient u et f deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Si u ne s'annule pas sur I ,

Si u est strictement positive sur I ,

Pour tous réels a et b ,

Exercice 5

Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

1. $f(t) = \sqrt{5 - 3t}$, sur $\left] -\infty; \frac{5}{3} \right[$,

2. $g(x) = (3x^2 + 5)^4$, sur \mathbb{R} .

Correction

1. La fonction f est de la forme _____ avec $u(t) =$ _____ et donc

Ainsi, pour tout $t \in \left] -\infty; \frac{5}{3} \right[$:

$$g'(t) =$$

2. La fonction g est de la forme _____ avec $u(x) =$ _____ et donc : _____ Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) =$$

3 Applications de la dérivation

3.1 Dérivée et sens de variation

Propriété 5

Soit f une fonction définie sur intervalle I .

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, sauf peut-être en un nombre fini de valeurs où $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante sur I .
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, sauf peut-être en un nombre fini de valeurs où $f'(x) = 0$, alors f est strictement décroissante sur I .
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .

Exercice 6

Étudier le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = x^3$.

Correction

Déterminons tout d'abord l'expression algébrique de la fonction dérivée f' de f .

Pour tout réel x ,

Ainsi, pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, sauf pour $x = 0$ donc d'après la propriété précédente, f est croissante sur \mathbb{R} .

Propriété 6 -- Extremum local

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant x_0 .

Si $f'(x_0) > 0$ en changeant de signe de f' à x_0 , alors $f(x_0)$ est un minimum local pour f sur I .

Exercice 7

Étudier l'existence ou non d'un extremum local en 0 pour les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^4$ et $g(x) = x^3$.

Correction

Pour la fonction f .

On a $f'(x) = 4x^3$ et donc f' s'annule en $x = 0$.
On vérifie que la fonction f présente un minimum local en $x = 0$.

En appliquant la propriété précédente nous obtenons que f est croissante sur \mathbb{R} .
On vérifie ici, que la courbe correspondante possède un minimum local en $x = 0$.

Pour la fonction g .

On a $g'(x) = 3x^2$ et g' s'annule en $x = 0$ mais en restant positive.
Ainsi, la fonction g ne possède pas d'extremum local en 0, chose qui se vérifie en traçant la courbe de la fonction cube.