Terminale ~ Spécialité mathématiques
Fonction logarithme népérien

1 Quelques questions pour démarrer

- Résoudre $x^2 = 4$.

  Correction

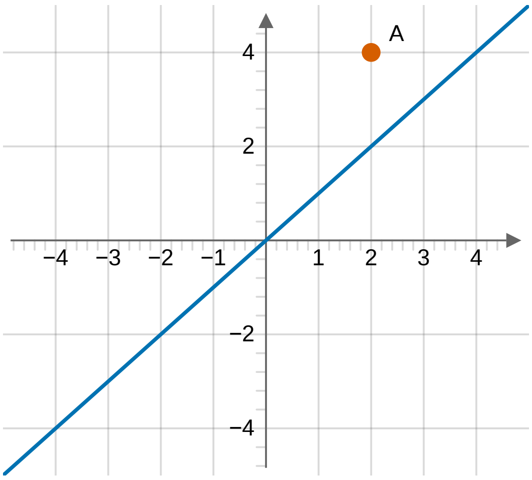
  Cette équation possède

- Pour $a > 0$, existe-t-il un nombre positif qui élevé au carré vaut a ?

  Correction

  En étudiant la fonction f définie sur le théorème de nous assure d'un tel nombre.
  Par définition, si $a > 0$, alors est la de l'équation

- Quel est l'image du point $A(2;4)$ par la symétrie d'axe $D : y = x$?



  Correction

  Le point est le symétrique de A par rapport à D.
  Retenons que la symétrie d'axe D :

  Ainsi, le point $M(x;y)$ a pour image

- Existe-t-il un nombre strictement positif dont l'exponentielle vaut b ?

  Correction

  Si $b \leq 0$ la réponse est
  Si $b > 0$ le théorème de appliqué à la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par nous permet de répondre par

2 Définition et propriétés

2.1 Définition

Définition 1

Pour tout nombre réel b strictement positif, il existe
On appelle ce nombre le
On le note

Exemple 1

-
-

- Pour tout x strictement positif,
- Pour tout x réel,

2.2 Propriétés algébriques

Propriété 1 -- *Logarithme népérien d'un produit*

Pour tout réel a et b on a :

Preuve
On va calculer et comparer
On a d'une part :
D'autre part :
Or,
D'où,

Propriété 2 -- *Logarithme népérien de l'inverse*

Pour tout réel a on a :

Preuve

On utilise la propriété précédente :

D'où

Propriété 3 -- *Logarithme népérien d'un quotient*

Pour tous réels a et b on a :

Preuve
On utilise les deux propriétés précédentes :

Propriété 4 -- *Logarithme népérien d'une puissance*

Pour tout réel a et tout entier naturel n, on a :

Preuve
Remarquons tout d'abord que :
De même :
En généralisant, pour n assez grand, on a :

Donc,
On répète jusqu'à obtenir :

Remarque 1

Nous aurions pu démontrer directement cette propriété par

Propriété 5 -- *Logarithme népérien d'une racine carrée*

Pour tout réel a on a :

Preuve

On a :

D'où

3 Fonction logarithme népérien

3.1 Définition

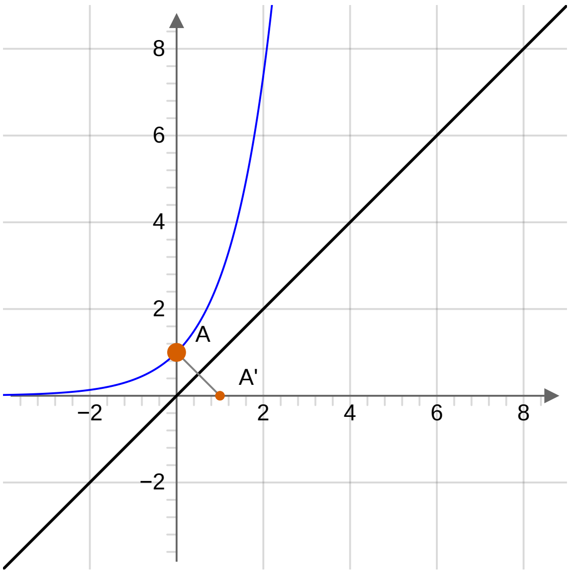
Définition 2

On appelle fonction logarithme népérien, la fonction qui à tout réel x de l'intervalle associe le réel

Remarque 2

- On dit que les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont
  Pour tout réel $x > 0$ et pour tout réel y, on a :
- Dans un repère orthonormal, les courbes (E) et (L), qui représentent respectivement les fonctions $\exp$ et $\ln$, sont

  Pour tout réel $x > 0$ et pour tout réel y on a :
  si et seulement si



3.2 Limites de la fonction ln

Propriété 6

- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x) =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) =$

Preuve

On procède par changement de variable à partir des limites de la fonction exponentielle.

On pose expression équivalente à $X =$

On a alors :

Ainsi :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln(x) =$$

De même :

$$x \to +\infty \Longleftrightarrow$$

On peut alors conclure :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) =$$

3.3 Dérivabilité et continuité de la fonction ln

Propriété 7 ROC

La fonction $\ln$ est et sur et pour tout réel x strictement positif,

Preuve
Pour tout réel x, $(\exp(x))' =$ donc la courbe représentative de la fonction exponentielle n'admet que des tangentes en chacun de ses points.
Ainsi par symétrie, la courbe représentative de la fonction $\ln$ admet en tout point une tangente
La fonction $\ln$ est donc sur et est donc aussi sur cet intervalle.

Pour le calcul de la dérivée on utilise : $(\mathrm{e}^u)' =$ pour dériver l'égalité

Exercice 1

Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes sur $[0;+\infty[$:

1. $f(x)=\ln(x)+\dfrac{1}{x}$
2. $g(x)=x\ln(x)-x$
3. $h(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

Correction

1. Pour la fonction f, nous dérivons terme à terme :

   $f'(x)=$

2. Pour la fonction g nous utilisons la formule de dérivation d'un produit, pour

   $g'(x)=$

   Ce résultat est intéressant. En effet, nous venons de rencontrer une fonction telle que sa dérivée est la fonction On dit que la fonction g est une de la fonction $\ln$.

3. Pour la fonction h nous utilisons la formule de dérivation d'un quotient

   $h'(x)=$

Exercice 2

Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentant la fonction $\ln$ aux points d'abscisse respective e et 1.

Correction

Équation de la tangente en e

Équation de la tangente en 1

Propriété 8

La fonction logarithme népérien est

Preuve

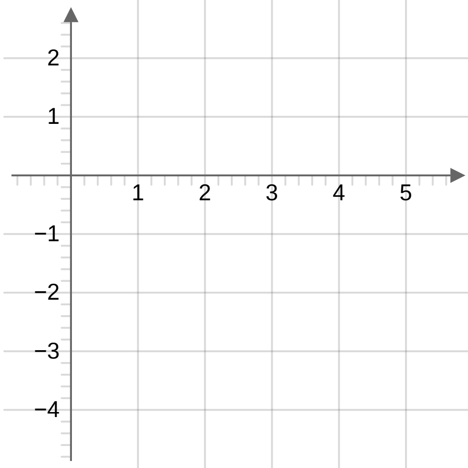
On a vu que pour tout $x>0$, on a

Propriété 9

- Si $x<1$ alors
- Si $x>1$ alors

Remarque 3

Cette propriété (ainsi que la suivante) vient du fait que la fonction $\ln$ est



Propriété 10

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $b > 0$:

Remarque 4

Cette propriété est utile lorsqu'on résoud des

3.4 Fonctions $\ln(u)$

Propriété 11

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

Si u est et sur I alors la fonction est définie et dérivable sur I et :

Exercice 3

Étudier la fonction définie par $f(x) = \ln(-x^2 + 4x + 5)$ sur $]-1\,;5[$.

Correction

Si on considère le polynôme p défini par $p(x) =$ on a que son discriminant Δ vaut et ses deux racines sont Ce qui justifie bien que l'ensemble de définition de f est

On a alors que pour tout réel $x \in]-1\,;5[$:

Sur $]-1\,;5[$ nous avons que $-x^2 + 4x + 5$ De plus

On a donc le tableau de variations suivant pour f :

Il nous reste à justifier les limites aux

Sur l'intervalle $]-1\,;5[$ le polynôme p est positif, donc lorsque x se rapproche de $-x^2+4x+5$ se rapproche de en étant Or $\ln(X)$ quand X se rapproche de
Ainsi par composition de limites :

Il en est de même lorsque x se rapproche de

3.5 Croissances comparées

Propriété 12 -- *Croissances comparées 1*

ROC

Preuve

Étude en $+\infty$.

On pose donc

On remarque que :

De plus, on a :

Or, d'après le cours sur la fonction exponentielle,

Donc,

Étude en 0.

On pose donc

On a :

De plus :

Donc d'après le résultat précédent,

Propriété 13 -- *Croissances comparées 2*

ROC

Pour tout entier $n \geq 1$,

Preuve: La démonstration découle immédiatement de la propriété 11 de croissances comparées et les propriétés opératoires des limites.