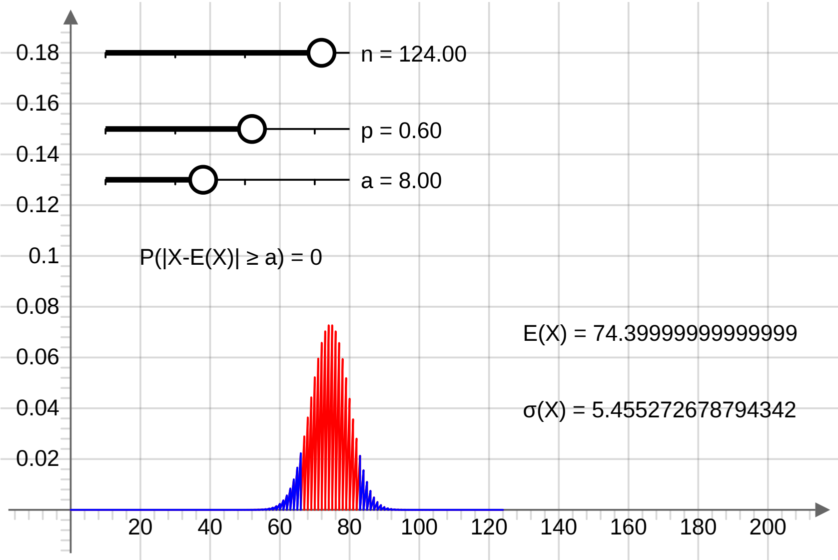
Terminale ~ Spécialité mathématique
Concentration / loi des grands nombres

1 Introduction

Soient n un entier naturel non nul, $p \in [0\,;1]$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
On s'intéresse à la probabilité que X soit



On remarque ici que plus a est plus la probabilité que X soit à une distance supérieure à a de $E(X)$ est

Exemple 1

On considère une pièce de monnaie équilibrée. On veut savoir combien de fois au maximum il faut la lancer pour que la probabilité d'être à plus ou moins 10 réalisations de l'espérance soit de moins de $0,01$.
À l'aide du graphique précédent, en fixant p à a à et en faisant varier n jusqu'à obtenir $P(|X - E(X)| \geq a)$ on trouve

2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 1 -- *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

Soit X une variable aléatoire dont on note respectivement $E(X)$ et $V(X)$ son espérance et sa variance.

Exemple 2

La moyenne du QI standard est de 100 est l'écart-type est de 15. Certaines personnes estiment qu'un individu donné est d'intelligence moyenne si son QI est situé à plus ou moins deux écart-types du score moyen.
On considère X la variable aléatoire qui pour une personne donnée associe son QI.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a :

La probabilité qu'une personne ne soit pas d'intelligence moyenne est donc

À noter que $0,25$ est un de la probabilité considérée. Celle-ci peut d'ailleurs être bien plus

3 Loi des grands nombres

Propriété 2 -- *Inégalité de concentration*

Soit X une variable aléatoire dont on note respectivement $E(X)$ et $V(X)$ son espérance et sa variance.
On considère M_n la variable aléatoire d'un échantillon de taille n de loi de X.

Pour tout réel $a > 0$,

Exemple 3

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on note X la variable aléatoire qui vaut 0 lorsqu'on obtient face et 1 pour pile.
On s'intéresse à un échantillon de taille $1\,000$ de la loi de X et on note M_n la variable moyenne associée. On veut connaître une majoration pour la probabilité que la moyenne de l'échantillon soit à plus de 10^{-1} de $0,5$.
D'après l'inégalité de concentration on a :

Ce que l'on peut traduire en disant que pour $1\,000$ lancers d'un pièce de monnaie équilibrée, la probabilité que la de piles obtenue soit entre est de

Propriété 3 -- *Loi faible des grands nombres*

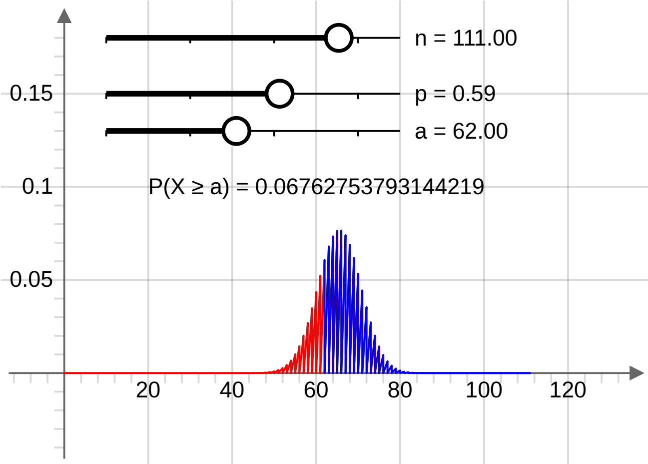
Soit X une variable aléatoire et un échantillon de taille de n de loi de X. On note M_n la variable aléatoire associée à cet échantillon.
Pour tout réel $a > 0$,

Remarque 1

La loi faible des grands nombres implique qu'on peut approcher la valeur de l'espérance avec la précision et une probabilité aussi fortes que souhaitées, en calculant la d'un échantillon si la taille de cet échantillon est assez .

4 Annexe - Inégalité de Markov et démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soient n un entier naturel non nul, $p \in [0\,;1]$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
On observe sur le graphique que plus a est grand, plus la probabilité que X soit supérieur à a est petite.



L'algorithme ci-dessous permet d'afficher la $P(X \geq a)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n\,;p)$.

```python
def facto(n):
    f = 1
    for i in range(1,n+1):
        f = f*i
    return f

def binom(n,p,k):
    return (1.0*facto(n))/(facto(k)*facto(n-k))*(p**k)*((1-p)**(n-k))

def proba(n,p,a):
    r = 0
    for i in range(a,n+1):
        r = r+binom(n,p,a)
    return r

print( proba(100,0.5,60) )
```

Propriété 4 -- *Inégalité de Markov*

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et d'espérance $E(X)$.

Pour tout réel $a > 0$, $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$.

Preuve

Notons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n valeurs de X. Par définition de l'espérance on a :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

On peut alors séparer le sigma en deux, en considérant les valeurs de x_i telles que $x_i < a$ ou $x_i \geq a$. Ainsi :

$$E(X) = \sum_{x_i<a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i).$$

La variable aléatoire X étant à valeurs positives on a que $x_i \geq 0$ et puisque une probabilité est également positive on a : $\displaystyle\sum_{x_i<a} x_i P(X = x_i) \geq 0$ et :

$$E(X) \geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i).$$

On peut alors minorer chacun des x_i par a, ce qui donne : $\displaystyle E(X) \geq \sum_{x_i \geq a} aP(X = x_i)$,

Or, $\displaystyle\sum_{x_i \geq a} aP(X = x_i) = a \sum_{x_i \geq a} P(X = x_i) = aP(X \geq a)$.

Ainsi on a bien : $E(X) \geq aP(X \geq a)$, c'est-à-dire, puisque $a > 0$, $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$.

Exercice 1

En France, la taille moyenne d'une femme adulte est de 165 cm. On note X la variable aléatoire qui pour une adulte donnée associe sa taille.

Déterminer, à l'aide de l'inégalité de Markov, un majorant de la probabilité que cette femme mesure plus de 180 cm (taille moyenne des mannequins)

Correction

On cherche ici $P(X \geq 180)$. L'énoncé nous donne $E(X) = 165$. Ainsi d'après l'inégalité de Markow on a :

$P(X \geq 180) \leq \dfrac{E(X)}{180}$ soit $P(X \geq 180) \leq \dfrac{165}{180} \simeq 0,917$.

Ce qui nous permet de conclure que la probabilité qu'une femme ait une taille supérieure à 180 cm est inférieure à $0,917$.

Résultat à ne pas confondre avec une approximation de cette probabilité.

Propriété 5 -- *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

Soit X une variable aléatoire dont on note respectivement $E(X)$ et $V(X)$ son espérance et sa variance.
Pour tout réel $a > 0$, $P(|X - E(X)| > a) \leq \frac{V(X)}{a}$.

Preuve
Comme $a > 0$, les inégalités $|X - E(X)| > a$ et $(X - E(X))^2 > a^2$ sont équivalentes.
De plus, la variable $(X - E(X))^2$ est positive ou nulle On peut donc lui appliquer l'inégalité de Markov. Ainsi :

$$P\left(|X - E(X)|^2 > a^2\right) \leq \frac{E\left((X - E(X))^2\right)}{a^2}.$$

Or, par définition, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ donc :

$$P\left((X - E(X))^2 > a^2\right) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

On peut alors conclure : $P(|X - E(X)| > a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.