Terminale ~ Spécialité mathématique
Livret de révision

1 Suites numériques

Exercice 1 ★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier n par : $u_{n+1} = 20 + 0,5u_n$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier n : $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
2. Déterminer alors le sens de variation de la suite (u_n) ainsi que sa limite lorsque n ted vers $+\infty$.
3. Déterminer le premier entier n tel que $u_n > 38$.

Exercice 2 ★★

Le directeur d'une réserve marine a recensé $3\,000$ cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à $2\,000$.
Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3\,000$.

1. Justifier que $u_1 = 2\,926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95 \times u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2554

   Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1\,520$. On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.
5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1\,520$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,95$ dont on précisera le premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1\,520$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. Compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur strictement à $2\,000$.

```
n = 0
u = 3000
while ...
    n = ...
    u = ...
```

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

Exercice 3 ★★

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à $12\,000$ individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les $60\,000$ individus.

Partie A : un premier modèle
Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5% par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016+n$.
On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.

2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle
Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

   a. Justifier que g est croissante sur $[0;60]$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

   c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   d. En déduire la convergence de la suite (u_n).

   e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les $50\,000$ individus avec ce second modèle.
   Il utilise l'algorithme suivant.

```
n = 0
u = 12
while ...
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

   Compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.

2 Fonctions

Exercice 4 ★★

Partie A
On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
   a. Déterminer, pour tout $x \geq 1$ l'expression de $g'(x)$.

   b. Dresser le tableau de variation de g sur $[1;+\infty[$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur cet intervalle.

2. a. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

   b. En déduire les variations de f sur $[1;+\infty[$.

   c. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

d. La courbe $\mathcal{C}$ possède-t-elle une asymptote horizontale et/ou verticale ? Justifier votre réponse.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2}.

   b. En utilisant le fait que $f(\alpha) = 2$, montrer que $\ln(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha$.

Partie B

On donne en annexe un repère dans lequel est tracée la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f.

1. Construire dans le repère de l'annexe la droite Δ d'équation $y = x$.

2. Soit M_2 le point d'abscisse 2 de $\mathcal{C}$ et N_2 celui d'abscisse 2 de Δ.
   Placer ces points dans le repère de l'annexe et donner la valeur exacte de la distance M_2N_2.

3. Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathcal{C}$ et Δ.

   a. Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

   b. Peut-on affirmer que plus k est grand, plus la distance M_kN_k est proche 0 ?

   c. Après exécution de l'algorithme ci-dessous la variable k vaut 1 416 361 (le temps d'exécution peut être un peu long). Comment interpréter cette valeur ?

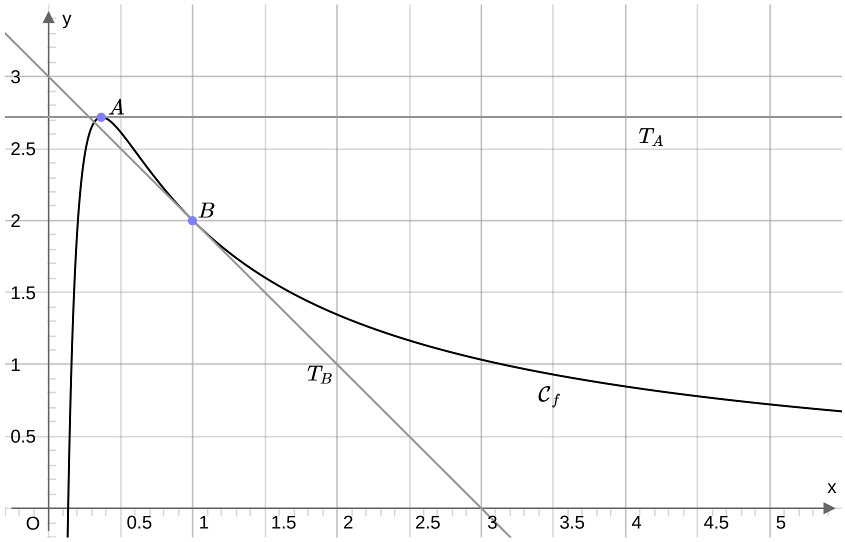
```python
from math import*
d = log(2)/2
k = 2

while d > 0.00001:
    k = k + 1
    d = log(k)/k
print(k)
```

Exercice 5 ★★

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$;
- la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\mathrm{e}\right)$;
- la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ et de $f'(1)$.

2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie II
On suppose maintenant que la fonction $f$est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x\in]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f. On admet que, pour tout $x\in]0\,;+\infty[$, $f''(x)=\dfrac{1+2\ln(x)}{x^3}$.
   Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice 6 ★★★

Partie A : établir une inégalité
Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x)=x-\ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x\in[0\,;+\infty[$, $\ln(x+1)\leqslant x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite
On pose $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n-\ln(1+u_n)$.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.
2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant 0$.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant 1$.

   c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.
4. a. Écrire un algorithme Python qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.

   b. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}.

Exercice 7 ★

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x\mathrm{e}^{-x}+1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f.

1. a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$.

   b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1\,;\;0]$.

   b. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.
3. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y=x+1$.
4. L'objectif de cette question est de déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.
   À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu, pour tout réel x, l'expression et le signe de $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f.

	Instruction	Réponse
1	f(x)=x*exp(-x)+1	$x\mathrm{e}^{-x}+1$
2	g(x)=Dériver(Dériver(f(x)))	$\mathrm{e}^{-x}(x-2)$
3	Résoudre(g(x) >= 0)	$x \geq 2$

a. Déterminer le sens de variation de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction est convexe puis celui sur lequel elle est concave.

c. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2]$.

Exercice 8 ★★

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;4]$ par :

$$f(x)=(3x-4)\mathrm{e}^{-x}+2.$$

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, $f'(x)=(7-3x)\mathrm{e}^{-x}$.

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.

3. a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.

   b. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il permette d'obtenir un encadrement à 10^{-4} de α. Donner cet encadrement.

```
from math import*
def f(x):
    return (3*x-4)*exp(-x)+2

x = 0
while f(x) < 0:
    x = x+...
print(...)
```

4. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$ par $f''(x)=(3x-10)\mathrm{e}^{-x}$.
   a. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

   b. Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

3 Probabilités

Exercice 9 ★

On s'intéresse à la clientèle d'un musée.
Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.
Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée. Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet. Une étude est réalisée. Elle révèle que:

• 70 % des clients achètent leur billet sur internet;
• parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35 % choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
• parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55 % choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les évènements suivants :

• A : "Le client choisit une visite avec un audioguide ";
• B : "Le client achète son billet sur internet avant sa visite".

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Démontrer que la probabilité que le client choisisse une visite avec un audioguide est égale à $0,41$.

3. On s'intéresse aux clients qui visitent le musée avec un audioguide.
Si plus de la moitié d'entre eux ont acheté leur billet sur internet alors le directeur proposera à l'avenir la location de l'audioguide sur le site internet du musée.
D'après les résultats de cette étude, que va décider le directeur? Justifier la réponse.

4. On observe un échantillon de 50 visiteurs. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de visiteurs ayant choisi une visite avec audioguide dans cet échantillon.
   a. Quelle loi de probabilité suit la variable X ?

   b. Déterminer $E(X)$ l'espérance de X.

   c. Déterminer $P(X \geq 25)$.

Exercice 10 ★★

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement " le joueur gagne la n-ième partie " ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

Partie A - Les premières parties

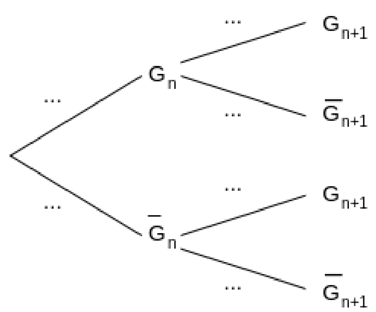
1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.

3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.

Partie B - Un grand nombre de parties

1. Compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_n = p_n - \frac{3}{4}$.
   a. Déterminer la nature de la suite (u_n) et en déduire que pour tout entier n : $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

   b. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 11 ★★

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec conduite accompagnée ;
- la formation traditionnelle.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec conduite accompagnée; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.

- 225 personnes se sont présentées à l’examen suite à une formation traditionnelle; parmi elles, 100 ont réussi l’examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
On considère les événements suivants :
A : «la personne a suivi une formation avec conduite accompagnée» ;
R_1 : «la personne a réussi l’examen à la première présentation» ;
R_2 : «la personne a réussi l’examen à la deuxième présentation» ;
R_3 : «la personne a réussi l’examen à la troisième présentation».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.

   Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d’une fraction irréductible.
2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussi l’examen à sa deuxième présentation.

   b. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l’examen à sa deuxième présentation est égale à $\dfrac{1}{3}$.

   c. La personne interrogée a réussi l’examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu’elle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?

3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s’est présentée à l’examen jusqu’à sa réussite. Ainsi, $\{X=1\}$ correspond à l’événement R_1.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b. Calculer l’espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l’exercice.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.
   On admet que la probabilité de l’évènement R_3 est égale à $\dfrac{1}{6}$.
   a. Dans le contexte de cette question, préciser un événement dont la probabilité est égale à $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

   On considère la fonction Python *seuil* ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l’intervalle $]0\,;1[$.

```python
def seuil(p):
    n = 1
    while 1-(5.0/6)**n <= p:
        n = n+1
    return n
```

   b. Quelle est la valeur renvoyée par la commande *seuil(0.9)* ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l’exercice.

Exercice 12 ★★

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs : rouge, vert, bleu. Tous les secteurs sont équiprobables, quel que soit le lancé.
Un joueur lance la roue.

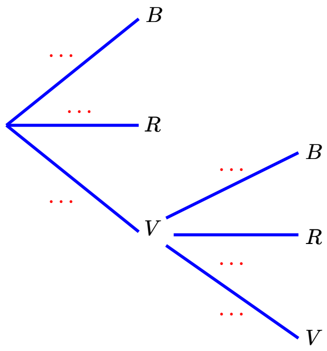
- Si le bleu sort, il perd 3 euro.
- Si le rouge sort il gagne 6 euro.
- Si il tombe sur du vert il relance la roue et :
  - si le vert sort il ne gagne rien.
  - si le rouge sort il gagne 1 euro.
  - si le bleu sort il perd 2 euro.

On note :

- V l'évènement : « le joueur tombe sur le secteur vert »,
- R l'évènement : « le joueur tombe sur le secteur rouge »,
- B l'évènement : « le joueur tombe sur le secteur bleu ».

Partie A
la roue se compose de 12 secteurs : 3 rouges, 5 verts et 4 bleus.

1. a. Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous pour qu'il représente l'expérience aléatoire.



b. Calculer la probabilité d'obtenir, à la fin du jeu, un secteur bleu.

2. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.
   a. Calculer $P(X = -3)$ et $P(X = -2)$.

   b. Donner la loi de probabilité de X.

   c. Est-il intéressant de jouer à ce jeu ?

Partie B

La roue se compose maintenant de 3 secteurs rouges, 4 secteurs bleus et n secteurs verts, n étant un entier naturel non nul.
Soit X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue de la partie.

1. Montrer que pour tout entier n, $E(X_n) > 0$?

2. Le gérant de la loterie décide de rendre payant la participation à son jeu.
   Pour une participation de 2 euros, existe-t-il une valeur de n pour laquelle le gain moyen du gérant soit inférieur à $0,30$ euros par partie ?

Exercice 13 ★

Une usine conditionne sa production d'un certain type de vis dans des boîtes de 30 pièces.
La probabilité qu'une vis soit conforme est de $0,98$, et la production est suffisamment importante pour que le choix d'une vis soit considéré comme un tirage avec remise.
On considère X la variable aléatoire qui a toute boite de 30 pièces associe le nombre vis non conformes qu'elle contient.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer, à 10^{-3}, $P(X \geq 2)$ et interpréter le résultat.

3. Une boîte de 30 vis de cette production ne peut être mise en vente si elle contient au moins deux vis non conformes.
   L'usine choisit de vendre $1\,000$ de ces boîtes à un grand magasin. La constitution et le choix d'une boîte dans l'ensemble de la production est également assimilée à un tirage avec remise.
   On note Y la variable aléatoire qui à un échantillon de $1\,000$ boites associe le nombre de boîtes invendables.
   a. Déterminer les valeurs de l'espérance de Y, notée $E(Y)$ ainsi que de son écart-type $\sigma(Y)$. Les résultats seront arrondis à l'unité.

   b. L'usine propose d'offrir 50 boites sur les $1\,000$ au magasin. Ce choix est-il raisonnable ?

Exercice 14 ★

Dans une usine de conditionnement de lait, une chaîne de production remplit des bouteilles d'un volume théorique d'un litre.
Des relevés statistiques ont permis de montrer que les bouteilles contiennent, au centilitre près, les volumes suivant :

Volume en cL	997	998	999	$1\,000$	$1\,001$	$1\,002$	$1\,003$
Fréquence	$0,11$	$0,21$	$0,22$	$0,18$	$0,13$	$0,08$	$0,07$

On définit la variable aléatoire X qui à toute bouteille choisit au hasard dans la production, associe son volume en centilitres.
On estime que la production est suffisamment importante pour que le choix d'une bouteille soit assimilé à un tirage avec remise.
Les bouteilles sont regroupées sur des palettes de 240. On note S un tel échantillon et on admet que S est un échantillon de taille 240 de la loi de X.

1. Compléter l'algorithme suivant pour que la fonction *esp* retourne la valeur de l'espérance de X et *sigma* la valeur de l'écart-type de X.

```python
from math import*
def esp(valeurs,probas):
    n = len(valeurs)
    e = 0
    for i in range(0,n):
        e = e+...
    return e

def sigma(valeurs,probas):
    n = len(valeurs)
    v = 0
    e = esp(valeurs,probas)
    for i in range(0,n):
        v = v+probas[i]*(...)**2
    s = ...
    return s

valeursX = [997, 998, 999, 1000, 1001, 1002, 1003]
freqX = [0.19, 0.23, 0.21, 0.17, 0.09, 0.06, 0.05]
print(esp(valeursX,freqX))
print(sigma(valeursX,freqX))
```

2. Donner, à 10^{-1} près, les valeurs de l'espérance de X, notée $E(X)$, et de son écart-type $\sigma(X)$.

3. En déduire $E(S)$ et $\sigma(S)$.

4. Sachant que la masse volumique du lait est de $1\,030$ g/L, interpréter les résultats de la question précédente (on arrondira les résultats au dixième de kg).

4 Géométrie dans l'espace

Exercice 15 ★★

Soit d la droite dont une paramétrisation est :

$$\begin{cases} x &= & 1-2t \\ y &= & 3t \\ z &= & -3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Donner les coordonnées de deux points appartenant à d.

2. Donner les coordonnées de deux vecteurs directeurs de d.

3. Le point $A(5;-6;5)$ appartient-il à d ?

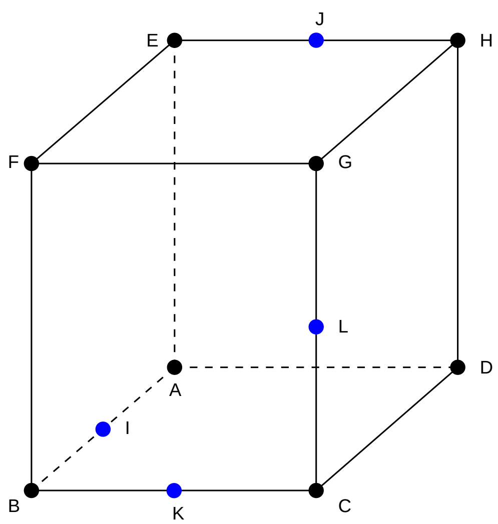
4. Soit $B(1;0;-9)$. Le point C milieu de $[AB]$ est-il un point de d ?

5. Déterminer la distance AB.

6. Soit Δ la droite passant par B et dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}3\1\0\end{pmatrix}$.
   Déterminer la position relative de d et Δ. Préciser leur(s) éventuel(s) point(s) d'intersection.

Exercice 16 ★★

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

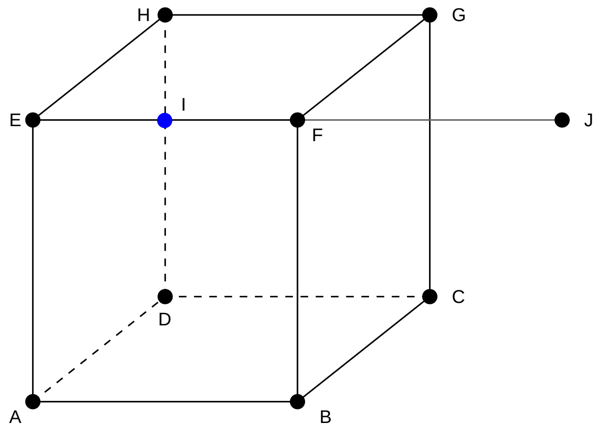
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.

Exercice 17 ★★

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1, le milieu I de $[EF]$ et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.

   b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.

   c. Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

   d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

   b. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{5}{6}\right)$.

   Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

   où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

   a. Calculer le volume de la pyramide $FBGI$.

   b. En déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice 18 ★★

On se place dans un repère orthonormée de l'espace et on considère le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est :

$$2x - y + z = 4.$$

On considère de plus les points $A(6\,;-1\,;3)$, $B(0\,;0\,;4)$, $C(2\,;-1\,;-1)$ et $D\left(\frac{5}{2}\,;0\,;-1\right)$.

On note d la droite perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par A.

1. Déterminer lesquels des points A, B, C et D appartiennent à $\mathscr{P}$?

2. Quelle est la nature du triangle BCD ?

3. Donner une paramétrisation de d.

4. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonale de A sur $\mathscr{P}$.

5. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 19 ★★

Dans un repère de l'espace on considère le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est :

$$x - 2y + z = 5.$$

On considère de plus le point $A(5\,;0\,;-6)$ et $B(1\,;-2\,;0)$.

1. Justifier que le point B appartient à $\mathscr{P}$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire à $\mathscr{P}$ et passant par A.

3. Déterminer les coordonnées de C intersection de d et $\mathscr{P}$.

4. Soit M un point de d.

   Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\cos\left(\overrightarrow{MB}\,,\overrightarrow{MC}\right) = \sqrt{\dfrac{6t^2 - 12t + 6}{6t^2 - 12t + 56}}$.

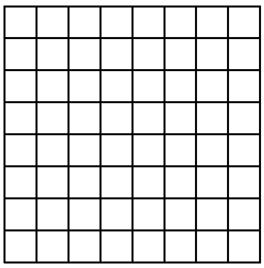
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \dfrac{6t^2 - 12t + 6}{6t^2 - 12t + 56}$.

   Que peut-on en déduire pour l'angle $\left(\overrightarrow{MB}\,,\overrightarrow{MC}\right)$ lorsque M s'éloigne de C ?

5 Combinatoire et dénombrement

Exercice 20 ★

On considère le quadrillage de Pixel Art ci-dessous.



1. Combien de dessins différents peut-on faire en ne coloriant les cases qu'avec deux couleurs ?

2. La console NES, sortie en 1983 au Japon, possède une architecture 8 bits qui lui permet de gérer des sprites (les personnages dans les jeux) codés sur 8×8 pixels, comme le quadrillage précédent.
   Pour un même jeu, le créateur choisissait quatre couleurs différentes pour ces sprites parmi une palette de 64 couleurs, dont la couleur transparente utilisée dans toutes les palettes. Ainsi chaque sprite était dessiné avec la couleur transparente (pour faire apparaître le fond) et avec trois autres « vraies » couleurs.
   a. Combien de palettes de quatre couleurs distinctes (comprenant la couleur transparente) pouvait-on utilisée sur la NES ?

   b. Une fois les quatre couleurs choisies, combien de sprites différents pouvait-on créer ?

Exercice 21 ★

Un digicode possède 10 touches numérotées de 0 jusqu'à 9 et les lettres A et B.
On sait que le code permettant d'ouvrir la porte protégée par ce digicode est composé de quatre chiffres suivis d'une lettre.

1. Combien de codes différents peut-on écrire en suivant cette information ?

2. On remarque que la touche 0 est très usée, et on suppose que le code d'ouverture possède ce numéro. Combien de codes possibles dénombre-t-on alors ?

Exercice 22 ★★

Soit E l'ensemble $\{1\,;2\,;3\}$ et $F = \{1\,;2\,;3;4\,;5\}$.

1. Déterminer le nombre de triplets de E dont l'un des nombres est égale à la moyenne des deux autres.

2. Combien de triplets d'éléments de F peut-on dénombrer ?

3. Compléter les trois espaces contenant des pointillés de l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche le nombre de triplets de F dont un des termes est la moyenne des deux autres.

```
c = 0
for i in range(1,6):
    for j in range(1,6):
        for k in range(1,6):
            if (i==j and j==k) or (i+j==2*k) or (i+k==2*...) or (j+k==...):
                c = ...
print(c)
```

Exercice 23 ★★

En France, une boulangerie est dans l'obligation de fermer un jour par semaine.
Dans une certaine ville on compte cinq boulangeries.

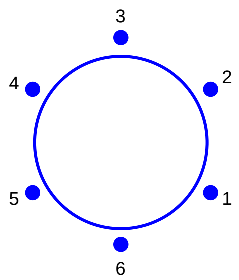
1. Déterminer le nombre de façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire pour l'ensemble des boulangeries de cette ville.

2. Même question mais avec l'obligation de ne pas fermer le même jour.

3. Même question mais avec l'obligation qu'il y ait au moins une boulangerie ouverte chaque jour.

Exercice 24 ★★

Une table ronde comporte six places, numérotées de 1 à 6.
On veut répartir six personnes autour de cette table dont deux ne peuvent être placées côte à côte. Appelons-les Booris et Kaaba.



1. Combien y-a-t-il de dispositions possibles?

2. Même question si les places ne sont pas numérotées.