

Terminale ~ Spécialité mathématique

Combinatoire et dénombrement

1 - Factorielle d'un entier et triangle de Pascal

1.1 - Factorielle d'un entier

Définition 1

Soit n un entier naturel. On appelle $n!$ le nombre entier noté $n!$ qui est égale de tous les entiers de 1 à n , si $n \geq 1$, ou qui vaut 1 si $n = 0$.

Exemple 1

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\frac{8!}{6!}$ b. $\frac{20!}{17!}$ c. $\frac{n!}{(n-1)!}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. d. $\frac{(n+2)!}{n!}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction

a. $\frac{8!}{6!} = 8 \times 7$

b. $\frac{20!}{17!} = 20 \times 19 \times 18$

c. $\frac{n!}{(n-1)!} = n$

d. $\frac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1)$

Exemple 2

Les deux algorithmes ci-dessous permettent de calculer la factorielle de n'importe quel nombre entier.

Algorithme n°1

Algorithme n°2 récursif

Un algorithme récursif est un algorithme qui résout un problème en calculant des solutions à partir de versions plus petites du même problème. Il s'agit d'un concept fondamental en informatique.

1.2 - Triangle de Pascal

Exercice 2

Compléter le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & \dots & \dots & 1 & & \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

Remarque 1

Ce tableau s'appelle « le triangle de _____ ».

2 - Cardinal d'ensembles

Définition 2

Soit n un entier naturel et E un ensemble possédant n éléments.

On dit alors que E est un _____ et son nombre d'éléments est appelé _____ de E . On le note _____

Exercice 3

Soit C l'ensemble des codes à quatre chiffres et D l'ensemble des codes à quatre chiffres sans répétition (tous les chiffres du code sont distincts).

Déterminer $\text{card}(C)$ et $\text{card}(D)$.

Correction

Lorsqu'on compose un code à quatre chiffres on a _____ choix pour chacun des chiffres. Ainsi,

Lorsque les quatre chiffres sont distincts on a _____ possibilités pour le premier chiffre, puis _____ pour le deuxième, _____ pour le troisième et _____ pour le quatrième. Ainsi :

Remarque 2

- $\text{card}(\emptyset) =$ _____
- Certains ensembles ne sont pas finis. Par exemple l'ensemble _____ des entiers naturels, l'intervalle _____ etc.

Définition 3

On dit que deux ensembles A et B sont _____ si _____

Propriété 1

Soient A et B deux ensembles disjoints. On a alors :

Exemple 3

Soit P l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 30 et Q l'ensemble des multiples de 4 inférieurs à 30. On a : $\text{card}(P \cup Q) =$ _____

Propriété 2

Soit n un entier naturel non nul, et A_1, A_2, \dots, A_n des ensembles finis, deux à deux

On a :

Remarque 3

On pourrait démontrer cette propriété par

Définition 4

- Un k -uplet de deux éléments a et b d'un ensemble E est la donnée de ces deux éléments dans un ordre particulier. On le note (a, b) .
- Un k -uplet de trois éléments a, b et c d'un ensemble E est la donnée de ces trois éléments dans un ordre particulier. On le note (a, b, c) .

Exemple 4

Soit $E = \llbracket 0; 9 \rrbracket$. L'ensemble des couples de E est de cardinal de $10 \times 10 = 100$ car par exemple le couple $(0, 0)$ est différent du couple $(0, 1)$.

Définition 5

Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien de E et F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (e, f) avec e et f des éléments respectifs de E et F .

Propriété 3

Soient E et F deux ensembles finis. On a :

Exemple 5

Soit E un ensemble de couleurs possibles pour un maillot. $E = \{R; V; B\}$, pour rouge, vert et bleu.
Soit F l'ensemble des numéros possibles que peuvent porter ces maillots. $F = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
L'ensemble des maillots possibles (couleurs + numéros) est :

Son cardinal est de $3 \times 5 = 15$.

Propriété 4

Soit n un entier naturel non nul, et A_1, A_2, \dots, A_n des ensembles finis. On a :

Remarque 4

On note A^2 l'ensemble $A \times A$ ou encore A^3 l'ensemble $A \times A \times A$ etc.

3 - k -uplets \sim Parties d'un ensemble \sim Arrangements \sim Permutations

Définition 6

Soit A un ensemble fini et k un entier naturel non nul. On appelle k -uplet de A un élément de A^k .

Exemple 6

Un mot formé de 8 lettres est un _____ de l'alphabet.

Remarque 5

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si A est un ensemble fini de cardinal n , alors en appliquant la formule du cardinal d'un produit cartésien, il existe _____ k -uplet de A .

En effet, $\text{card}(E^k) =$

Définition 7

Une _____ d'un ensemble E est un

Remarque 6

Pour $E = \{a; b; c\}$ les parties de E sont :

Le nombre de parties de E est ici de

Propriété 5

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de parties de E est de

Preuve

On note _____ les éléments de E .

On associe à chaque partie P de E un unique _____ de la manière suivante : pour tout entier i entre 1 et n , on note _____ si e_i est _____ Par exemple, on associe à $\{e_1, e_5\}$ le n -uplet

Ainsi, le nombre de parties de E est égal au nombre de

Définition 8

Soient A un ensemble non vide de cardinal n et k un entier naturel inférieur ou égal à n .

Un _____ de k éléments de A est un _____ d'éléments _____ de A .

Exemple 7

Si $A = \{a; b; c; d\}$ alors _____ et _____ sont des _____ de trois éléments de A .
Par contre $(a; b; b)$ _____ d'éléments de A .

Propriété 6

Soient A un ensemble fini non vide à n elements et k un entier naturel tel que $k \leq n$.

Le nombre de k -arrangements de A est égal à :

Preuve

Pour construire un k -uplet de A , on a _____ choix pour le premier élément, puis _____ choix pour le deuxième, etc, jusqu'à _____ choix pour le _____ élément.

Ainsi, le nombre d'arrangement de k éléments de A est :

Définition 9

Soit A un ensemble fini non vide de cardinal n .

Une k -uplet de A est un k -uplet d'éléments de A .

Exemple 8

Si $A = \{1; 2; 3\}$, les permutations de A sont

Propriété 7

Le nombre de permutations sur un ensemble de cardinal n est de $n!$.

Preuve
D'après la propriété précédente, une permutation étant un n -uplet de n éléments sur un ensemble de n éléments, leur nombre est de :

4 - Combinaisons d'un ensemble fini

Définition 10

Soit A un ensemble fini de cardinal n et k un entier naturel tel que $k \leq n$.

Une k -combinaison de A est une

Le nombre de combinaisons de

Remarque 7

Dans une combinaison il n'y a pas de notion d'ordre.
Par exemple les combinaisons de deux éléments de $E = \{a; b; c\}$ sont :

On remarque donc que l'ensemble vide est une k -combinaison de E .
On peut d'ailleurs voir que l'ensemble vide étant la seule partie d'un ensemble ne possédant pas d'élément.

Propriété 8

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$. Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble de cardinal n vérifie :

Preuve
Dans un ensemble de n éléments il y a $n!$ arrangements de k éléments (ou k -uplets sans répétition).
Or, dans un k -uplet l'ordre compte. Cependant il y a $k!$ façons de permuter k éléments. Donc on peut compter les k -uplet par paquets de $k!$ pour ne les compter qu'une seule fois pour correspondre à une combinaison (puisque pour une combinaison l'ordre n'a pas d'importance).
Ainsi, le nombre de combinaison de k éléments parmi n vérifie :

Exercice 4

Déterminer :

a. $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$ et $\binom{2}{2}$.

b. $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.

Correction

a. $\binom{2}{0} =$

$$\binom{2}{1} =$$

$$\binom{2}{2} =$$

b. $\binom{3}{0} =$

$$\binom{3}{1} =$$

$$\binom{3}{2} =$$

$$\binom{3}{3} =$$

Propriété 9

Soit $n \in \mathbb{N}$.

-
- si $n \geq 1$,
- si $n \geq 2$,

Preuve

-
- si $n \geq 1$,
- si $n \geq 2$,

Propriété 10

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$. On a alors :

ROC

Preuve

Propriété 11

Soient n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n - 1$. On a alors :

Preuve n°1

On remarque alors que :

-
-

Le dénominateur commun dans $\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$ est donc

Il faut donc :

- multiplier le numérateur et le dénominateur de $\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ par $(n-1)!$
- multiplier le numérateur et le dénominateur de $\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$ par $(n-1)!$

On a alors :

Preuve n°2

Soit E un ensemble de cardinal n et soit a un élément de E . On définit les ensembles suivants :

- A l'ensemble
- B l'ensemble
- C l'ensemble

Le cardinal de A est

L'ensemble B contenant a pour le construire il faut donc choisir k éléments (puisque a est déjà choisi). Le cardinal de B est donc k .

De même, pour construire C il nous faut choisir $n - k - 1$ éléments parmi $n - 1$ (tous les éléments de E sauf a). Son cardinal est donc $n - k - 1$.

Remarquons que B et C sont disjoints (c'est-à-dire $B \cap C = \emptyset$).

Par ailleurs une partie à k éléments de E , B , est en bijection avec une partie à $n - k$ éléments de E . Ainsi :

Remarque 8

Cette formule justifie la construction du triangle de Pascal.

Propriété 12

Pour tout entier n :

ROC

Preuve.

Soit E un ensemble de cardinal n .

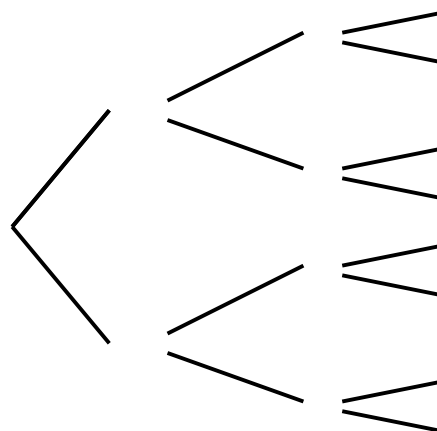
Pour tout entier k inférieur à n , le nombre $\binom{n}{k}$ correspond au nombre de parties à k éléments de E .

Ainsi, la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ correspond

Illustration dans le cas où $n = 3$.

On note $E = \{e_1; e_2; e_3\}$ un ensemble à trois éléments.

Pour déterminer l'ensemble des parties de E on peut parcourir l'arbre ci-dessous, la notation $\overline{e_1}$ voulant dire que l'on ne choisit pas l'élément e_1 :



Il y a _____ chemins possibles dans cet arbre qui sont respectivement :

Il y a _____ partie à _____ élément qui est :

Il y a _____ parties à _____ élément qui sont :

Il y a _____ parties à **2** éléments qui sont :

Il y a $\binom{3}{3} = 1$ parties à _____ éléments qui est :

Dans cette illustration nous avons bien :

Dans la démonstration on a généralisé cet exemple à un arbre contenant _____ chemins possibles en rassemblant les chemins par _____