

Terminale ~ Spécialité mathématique

Continuité / Fonctions convexes

1 - Continuité

1.1 - Définition

Définition 1 -- Fonction continue

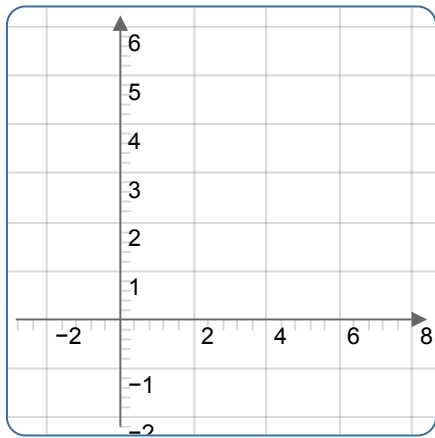
Soient I un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction définie sur I , et a un réel appartenant à l'intervalle I .

f est

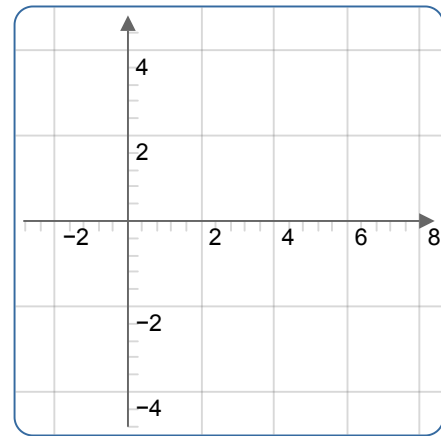
f est continue en a si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x - a| < \delta$, alors $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Remarque 1

La notion de continuité d'une fonction se traduit par une représentation graphique tracée « sans » le crayon.



Courbe d'une fonction continue sur $[-2; 7]$.



Courbe d'une fonction non continue sur $[-2; 7]$.

Propriété 1

Les fonctions polynômes, rationnelles et racines sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

Il en est de même des fonctions construites à partir de celles-ci par addition, multiplication et composition.

Il en est de même des fonctions construites à partir de celles-ci par addition, multiplication et composition.

Exemple 1

La fonction g définie par $g(x) = \frac{x^5 + x^2 + 3}{\sqrt{x}}$

est continue sur son ensemble de définition.

1.2 - Un exemple de fonction non continue

Toutes les fonctions "usuelles" connues en classe de première sont donc continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

Il existe cependant certaines fonctions non continues, l'exemple "classique" est la fonction partie entière.

Définition 2 -- Fonction partie entière

La fonction partie entière est la fonction, fréquemment notée $E(x)$, qui à tout réel x associe l'unique entier n tel que $n \leq x < n+1$.

qui à tout réel x associe l'unique entier n tel que $n \leq x < n+1$.

Exercice 1

Donner la valeur des nombres suivants :

$$E(2, 1)$$

$$E(2, 99)$$

$$E(-4, 01)$$

$E(-\sqrt{2})$

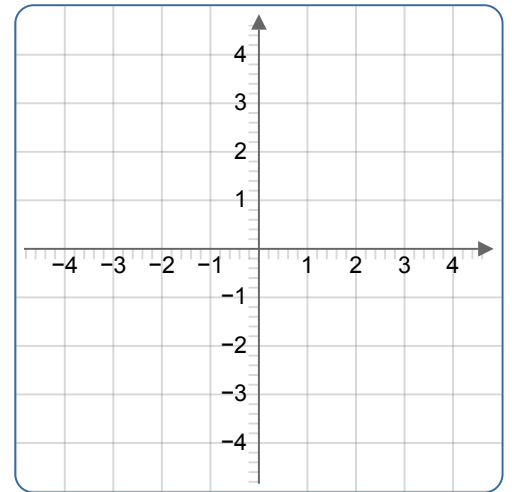
$E(\pi)$

$E(0)$

Remarque 2

Soit x un réel, $E(x)$ est le plus grand entier

Par ailleurs, comme nous pouvons le voir sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative de la fonction partie entière ressemble à un "escalier". Nous y observons des "sauts" au niveau de chacun des entiers. Nous parlons ici de



1.3 - Propriété des fonctions continues

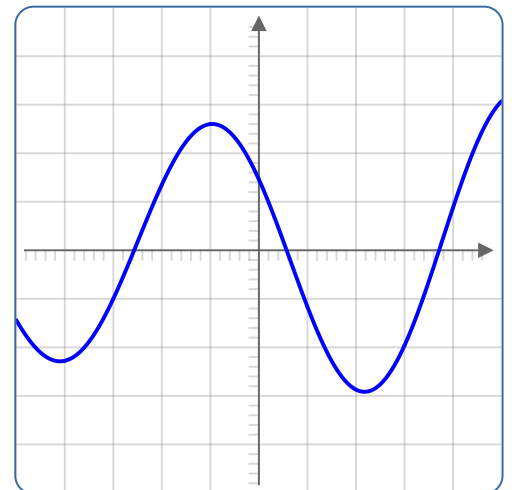
Propriété 2 -- Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie et sur un intervalle I , et soient a et b deux réels de I .

Si k est un réel compris entre les valeurs $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation admet au moins solution sur l'intervalle I .

Remarque 3

Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de f . Alors la droite d'équation $y = k$ coupe \mathcal{C}_f au moins lorsque k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.



Remarque 4

Ce théorème ne permet pas de résoudre une équation, mais permet de justifier qu'une solution de cette équation existe. Généralement, on ne peut obtenir qu'un encadrement de la ou des solution(s), à l'aide par exemple de la calculatrice.

Exercice 2

Montrer que : $x^3 + 4x^2 + 4x + 2 = 0$ admet au moins une solution sur $[-3; -1]$.

Correction

Soit f la fonction définie sur $[-3; -1]$ par $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$.

La question posée revient à démontrer que l'équation admet au moins une solution sur $[-3; -1]$.

La fonction f est sur $[-3; -1]$ en tant que fonction polynomiale. Par ailleurs,

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur l'intervalle

une solution sur

Remarque 5

Ce théorème permet donc de justifier l'existence d'une solution à une équation. Mais on ne peut pas prouver avec ce théorème l'unicité de la solution à une équation. C'est l'objet du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, aussi appelé **théorème de la bijection**.

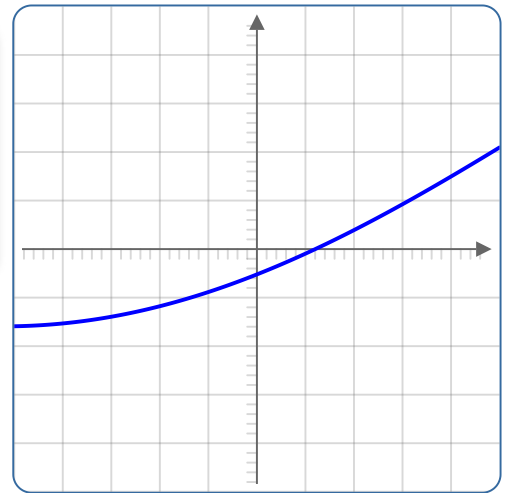
Propriété 3 -- Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$. Si f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a; b]$.

Preuve :

Puisque f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'une solution α à l'équation $f(x) = k$ sur $[a; b]$.

Il nous reste donc à prouver l'unicité de cette solution.



Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe un réel β tel que $f(\beta) = k$.

On alors

Et on obtient ainsi une contradiction avec le fait que f est strictement monotone.

Remarque 6

L'intervalle $[a; b]$ peut-être remplacé par un intervalle ouvert, semi-ouvert, et a et b peuvent être remplacés par $\pm\infty$.

Exercice 3

Montrer que l'équation $x^5 + x = 1$ admet une unique solution sur $[0; 2]$.

Correction

On définit sur l'intervalle $[0; 2]$ la fonction f par $f(x) = x^5 + x - 1$.

La question posée revient donc à démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 2]$.

Pour tout réel x de $[0; 2]$, on a : $f'(x) = 5x^4 + 1$ et puisque $f'(x) > 0$ on a

Ainsi, sur l'intervalle $[0; 2]$:

- f est continue sur $[0; 2]$
- f est strictement croissante en tant que fonction
- $f(0) = -1 < 0$ et $f(2) = 31 > 0$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 2]$.

1.4 - Continuité et dérivabilité

Propriété 4

Toute fonction sur un intervalle I est sur I .

Preuve

Soient x et a deux réels de I , $x \neq a$. On a :

$$f(x) - f(a) =$$

De plus : $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ puisque f est dérivable en a .

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

La fonction f est bien continue en a .

Remarque 7

La réciproque de cette propriété est fautive. En effet il existe des fonctions continues sur un intervalle qui ne sont pas dérivables.

Exemple 2

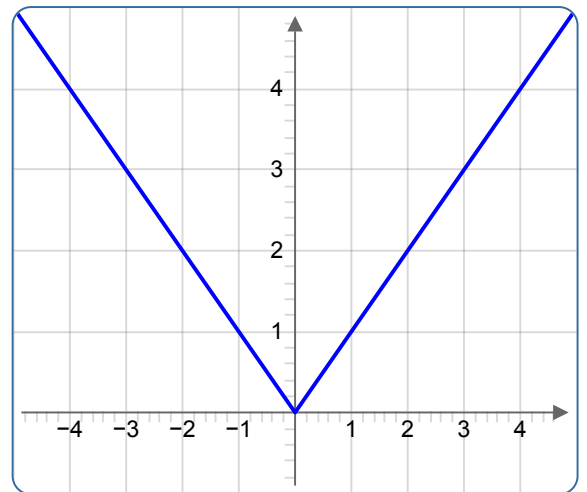
La fonction valeur absolue est continue sur \mathbb{R} , mais elle n'est pas dérivable en 0.

En effet, le taux d'accroissement en 0 vaut :

et on a :

alors que :

Ainsi, le taux d'accroissement de la fonction valeur absolue ne possède pas de limite en 0 (puisque l'on obtient deux résultats différents en s'approchant de 0 de deux manières différentes), elle n'est donc pas dérivable en 0 (cf définition de la dérivabilité).



On observe un "pic" en 0. Il n'existe aucune tangente en ce point.

1.5 - Continuité et suites convergentes

Propriété 5

Soit f une fonction définie sur intervalle I de \mathbb{R} , continue en $a \in I$. Soit (u_n) une suite convergente vers a . On a alors :

Exemple 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = E(x)$.

On a d'une part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) =$

Et d'autre part : $f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) =$

Ainsi, pour cette fonction f qui n'est pas continue en 1 , on a :

Propriété 6

Soient une fonction f continue sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) = x$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout entier n ,

Si (u_n) converge vers ℓ , alors ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Preuve

On sait que :

De plus, f est continue sur I , et d'après les hypothèses, pour tout entier n , $f(u_n) = u_n$ ainsi :

Remarque 8

Les solutions d'une équation de la forme $f(x) = x$ s'appellent les points fixes de la fonction f .

Une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est pas nécessairement convergente même si la fonction f possède un point fixe. De plus, dans le cas où la suite converge vers une unique limite, il se peut que la fonction possède plusieurs points fixes, dont seulement l'un des deux sera la limite de la suite.

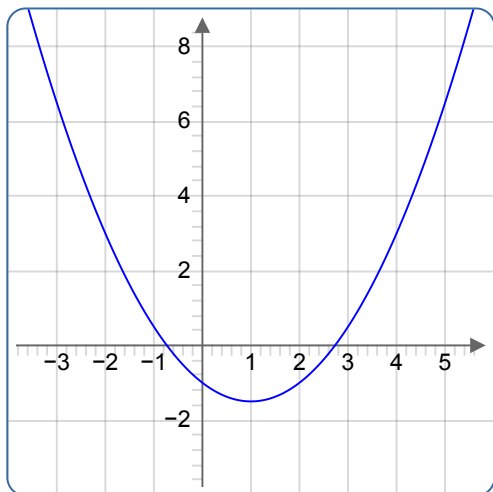
Dans toutes ces situations ce sera le contexte et les questions de l'exercice qui permettront de conclure.

2 - Fonctions convexes

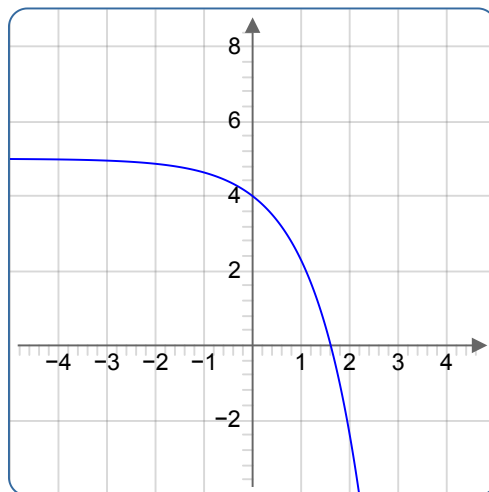
Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère du plan.

- On dit que f est convexe sur I , si pour tous réels a et b de I , la portion de \mathcal{C} comprise entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est au-dessous de la corde joignant ces deux points.
- On dit que f est concave sur I , si pour tous réels a et b de I , la portion de \mathcal{C} comprise entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est au-dessus de la corde joignant ces deux points.



Graphe d'une fonction convexe



Graphe d'une fonction concave

Remarque 9

Déterminer la convexité d'une fonction c'est chercher les intervalles sur lesquels cette fonction est convexe et ceux où elle est concave.

Exercice 4

Conjecturer graphiquement la convexité de la fonction carré, cube, racine carrée, inverse et exponentielle sur leurs ensembles de définition.

Correction

La fonction carrée est convexe

La fonction cube est convexe

La fonction racine carrée est concave

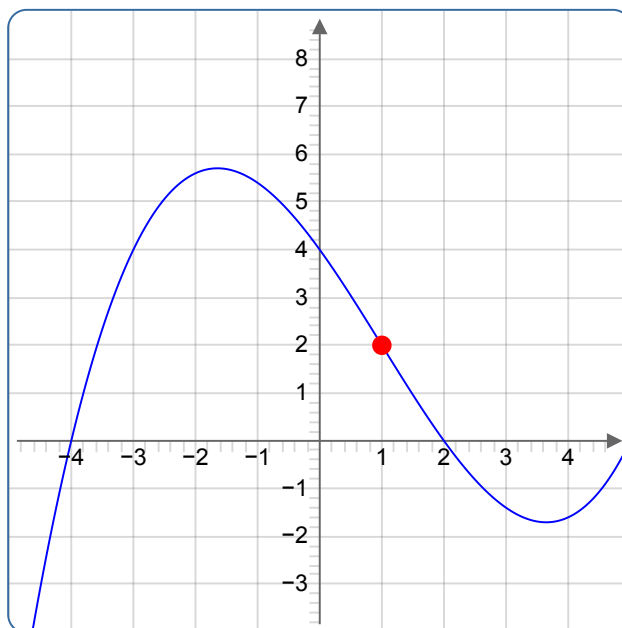
La fonction inverse est concave

La fonction exponentielle est convexe

Définition 4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$.

Le point $A(a; f(a))$ de \mathcal{C} est un point d'inflexion de \mathcal{C} si et seulement si la dérivée seconde s'annule en a et change de signe en a . Graphiquement, \mathcal{C} admet une tangente qui change de pente la courbe \mathcal{C} en ce point A .



Point d'inflexion en $x = 1$

Propriété 7

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

-
-
-

Propriété 8

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

-
-
-

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-3x}$. Étudier la convexité de f sur \mathbb{R} .

Correction

La fonction f est dérivable et on a : $f'(x) =$ et $f''(x) =$

Ainsi, la fonction f est

Propriété 9

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle $[a ; b]$ de \mathbb{R} .

Si f'' est alors la courbe représentative de f est



Preuve

Soit $x_0 \in I$ et soit d la tangente à la courbe \mathcal{C} représentant f dans un repère du plan au point d'abscisse

L'équation réduite de d est :

Pour déterminer la position entre \mathcal{C} et d on étudie le signe de :

Pour tout $x \in I$ on a

Puisque pour tout $x \in [a ; b]$, on a et la fonction

Or, donc pour tout $x \leq x_0$ on a et pour tout $x \geq x_0$, on a

Ainsi la fonction δ est et c'est-à-dire qu'elle présente un en x_0 .

Ce minimum vaut

La fonction δ est donc

et la courbe de la fonction f est bien

Exemple 4

On peut observer le résultat de cette proposition dans le graphique ci-dessus où on a tracé la courbe représentation de la fonction $f : x \mapsto e^{-3x}$ de l'exercice précédent.

