Terminale ~ Spécialité mathématiques
Géométrie dans l'espace (2)

Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal de l'espace.

1 - Produit scalaire dans l'espace

1.1 - Définition du produit scalaire

Définition 1

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Le produit de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que :

Exemple 1

1. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}.\vec{v} =$

2. Soit $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}.\vec{w} =$

Remarque 1

Le produit scalaire apparaît dans de nombreuses situations et permettra de plus de répondre rapidement à certaines questions.

1.2 - Norme d'un vecteur

Définition 2

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur et M un point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. La du vecteur $\vec{u}$ est le réel positif :

Exemple 2

Avec les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de l'exemple précédent :

$||\vec{u}|| =$ et $||\vec{v}|| =$

Définition 3

Soient A et B deux points de l'espace. La distance AB est définie par la du vecteur

Exemple 3

Étudions la sphère $\mathscr{S}(A, r)$ de centre $A(x_A; y_A; z_A)$ et de rayon $r > 0$.
On considère un point $M(x; y; z)$ de $\mathscr{S}(A, r)$. On a alors :

Or, $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées ainsi : $AM^2 =$

En conclusion, $M(x; y; z) \in \mathscr{S}(A, r)$ si et seulement si :

Exemple 4

L'équation de $\mathscr{S}(O, 1)$, sphère de centre O et de rayon 1 est :

1.3 - Orthogonalité

Remarque 2

Considérons les deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, ainsi que les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.

On a alors que : $\overrightarrow{AC} =$

De plus, d'après l'équivalence de Pythagore :

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux } &\iff \\ &\iff \\ &\iff \\ &\iff \\ &\iff \\ &\iff \\ &\iff \end{aligned}$$

Ainsi, le produit scalaire défini dans ce cours correspond bien à celui rencontré dans le plan, cette dernière remarque amenant à la propriété suivante.

Propriété 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont

Exemple 5

Avec les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ des exemples précédents nous avons donc :

➤ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont car

➤ $\vec{u}$ et $\vec{w}$

Exercice 1

Soient $A(1;2;3)$, $B(2;2;5)$ et $C(-1;5;4)$.

1. Montrer que ABC est rectangle en A.
2. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Correction

1.

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc et le triangle ABC est bien

2. Remarquons tout d'abord qu'il existe une de vecteurs othogonaux à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En effet, dès que nous en aurons trouvé un, alors tout vecteur à celui-ci sera également à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   On cherche donc x, y et $z \in \mathbb{R}$ tel que :

   On a alors :

   À partir de la première égalité, on choisit
   La deuxième égalité nous donne alors :

   Ainsi le vecteur convient.

Définition 4
Soient deux vecteurs de base d'un ou trois vecteurs de base de Si ces vecteurs sont la base est dite et si de plus les vecteurs sont de norme 1 la base est dite

Un repère orthonormée est la donnée

1.4 - Propriétés algébriques

Propriété 2

1. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$:
2. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}$:
3. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et tout $k \in \mathbb{R}$:
4. Pour tout vecteur $\vec{u}$:

Preuve
Il suffit d'écrire explicitement les calculs en utilisant la définition du produit scalaire donnée avec les coordonnées des vecteurs.

Remarque 3

Le point 1. décrit le caractère du produit scalaire.
Les points 2. et 3. décrivent le caractère par rapport à la variable de gauche du produit scalaire. Or, du fait de la symétrie, le produit scalaire est aussi linéaire par rapport à sa variable de Ainsi, le produit scalaire est linéaire par rapport à ses variables, on dit donc qu'il s'agit d'une application .

Propriété 3

1. Pour tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:
2. Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout $k \in \mathbb{R}$:
3. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:
4. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:
5. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:
6. Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:

Preuve
Pour le point 1 nous utilisons la définition du produit scalaire et pour les points 2 et 3 la propriété précédente.

1. $||\vec{u}||^2 =$
2. $||k\vec{u}||^2 =$
   Ainsi : $||ku|| =$
3. $||\vec{u}+\vec{v}||^2 =$
4. On obtient l'égalité à partir de la précédente en changeant de membres certains termes, ou alors en remplaçant $||\vec{u}+\vec{v}||^2$ par
5. On remplace $||\vec{u}-\vec{v}||^2$ par
6. On effectue les mêmes remplaçants que dans les deux calculs précédents.

1.5 - Autre expression du produit scalaire

Deux vecteurs (plus un point) définissent un plan (si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas), ou une droite (si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont). Donc pour calculer le produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ on peut se placer dans un plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On se retrouve alors à faire de la géométrie plane.
On considère trois points distincts, A, B et C de l'espace. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})$$
$$=$$
$$= \qquad \text{car } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HC} \text{ sont}$$
$$= \qquad \text{d'aprés la propriété précédente.}$$
$$= \qquad \text{selon le sens de } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH}$$

Or $AH =$ (le donnera le signe "+" ou "-" désiré), on obtient donc la propriété suivante :

Propriété 4
Soient A, B et C trois points de l'espace.

Exercice 2

Toujours avec les points $A(1;2;3)$, $B(2;2;5)$ et $C(-1;5;4)$, déterminer en degré la mesure de $\widehat{ABC}$.

Correction

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ On a alors :

$\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$

L'énoncé nous demande la mesure en degré de $\widehat{ABC}$, cela veut dire que ce n'est pas une valeur sur un intervalle de longueur mais une mesure comme au collège. Ici, on peut donc répondre en connaissant seulement le cosinus de l'angle : $\widehat{ABC} =$

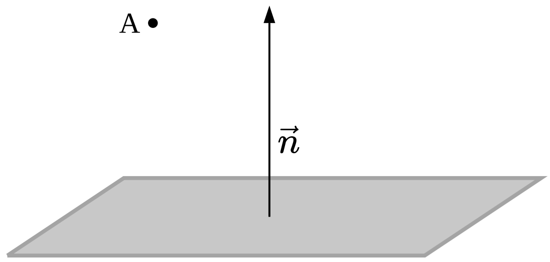
2 - Plans et orthogonalité

2.1 - Vecteur normal à un plan de l'espace

Définition 5
Soit $\vec{n}$ un vecteur et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. On dit que $\vec{n}$ est à $\mathscr{P}$ ssi toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est à $\mathscr{P}$.

Propriété 5
Soit A un point d'un plan $\mathscr{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur à $\mathscr{P}$.
Alors le plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que

Définition 6
Soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur $\vec{n}$ et A un point de l'espace.
Supposons $A \notin \mathscr{P}$ et posons $\mathscr{D} =$ la droite engendrée par A et le vecteur $\vec{n}$. (Cela signifie que $\mathscr{D}$ est la droite passant par et dirigée par le vecteur).
Alors le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ est :



Remarque 4

Si $A \in \mathscr{P}$, alors le projeté de A dans $\mathscr{P}$ est

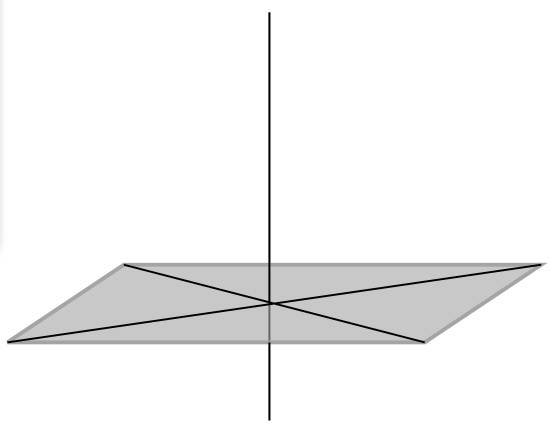
Propriété 6 ROC
On considère un plan $\mathscr{P}$ de l'espace ainsi qu'un point A. On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.
Pour tout point $M \in \mathscr{P}$, Ainsi, le projeté orthogonal est le point de $\mathscr{P}$ de A.

Preuve.

Propriété 7
Une droite d est à toute droite d'un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, elle est orthogonale à

Réciproquement, si $\vec{u}$, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont des vecteurs respectivement des droites alors :

Preuve
Un sens de l'équivalence est évident :
Si d est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$ alors elle est orthogonale à droites du plan $\mathscr{P}$.



puisque d est à d_1 et à d_2.

Soit une droite du plan $\mathscr{P}$ et $\vec{w}$ un vecteur de Δ.

Les droites d_1 et d_2 étant les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ et forment donc de $\mathscr{P}$. Il existe alors deux réels x et y tels que

On a ainsi :

On en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont et que la droite d est à la droite Δ.

Propriété 8

Soit $\mathscr{P}$ un plan par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit $\vec{n}$ un vecteur de l'espace.

Si $\vec{n}$ est à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors $\vec{n}$ est à $\mathscr{P}$.

Exemple 6

Pour les points des exercices précédents $A(1;2;3)$, $B(2;2;5)$ et $C(-1;5;4)$, nous avions trouver que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$ était orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$.

2.2 - Équation cartésienne d'un plan de l'espace

Propriété 9 ROC

1. Dans un repère orthonormé, un plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ a une de la forme : où $d \in \mathbb{R}$ fixé.
2. Réciproquement, si a, b, c ne sont pas tous les trois l'ensemble (E) des points $M(x;y;z)$ tels que est un plan de vecteur normal

Preuve

Soit $A(x_0;y_0;z_0)$ un point du plan $\mathscr{P}$ et $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

On a : et $\overrightarrow{AM}.\vec{n} =$

Ainsi : $M \in \mathscr{P}$ équivaut à soit à :

c'est-à-dire :

soit en posant à :

Réciproquement, puisque a, b et c ne sont pas tous nuls, on peut supposer par exemple que a est différent de 0.

On peut vérifier que le point appartient à l'ensemble (E) et l'équation

équivaut à c'est-à-dire à

(E) est donc le passant par et de vecteur normal

Exercice 3

Avec les points $A(1;2;3)$, $B(2;2;5)$ et $C(-1;5;4)$, déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Correction

Nous avions que vu que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur à (ABC). Ainsi il existe un réel d tel qu'une équation cartésienne du plan soit :

Il reste à déterminer la valeur de d. Pour cela nous allons utiliser les d'un point du plan (ABC), par exemple

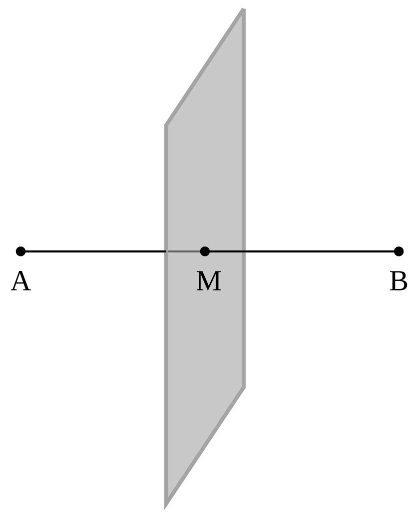
Le plan (ABC) possède donc pour équation cartésienne :

2.3 - Plan médiateur d'un segment

Définition 7
Soient A et B deux points distincts de l'espace et soit M le milieu du segment $[AB]$. Le plan de $[AB]$ est le plan à (AB) passant par

Remarque 5

Cette définition rappelle la définition, en géométrie plane, de la



Exercice 4

Déterminer une équation du plan médiateur de $[AB]$ avec $A(0;1;1)$ et $B(4;1;5)$.

Correction

Nous savons que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan de $[AB]$, ainsi une équation cartésienne du plan médiateur est de la forme :

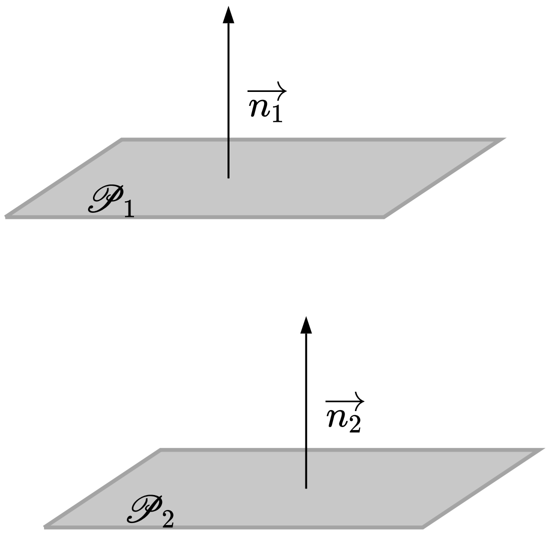
avec $d \in \mathbb{R}$ à
Le milieu de $[AB]$ de coordonnées appartient à ce plan, ses coordonnées l'équation du plan, et nous obtenons alors :

Nous trouvons donc que le plan médiateur de $[AB]$ a pour équation cartésienne : que l'on réduit à :

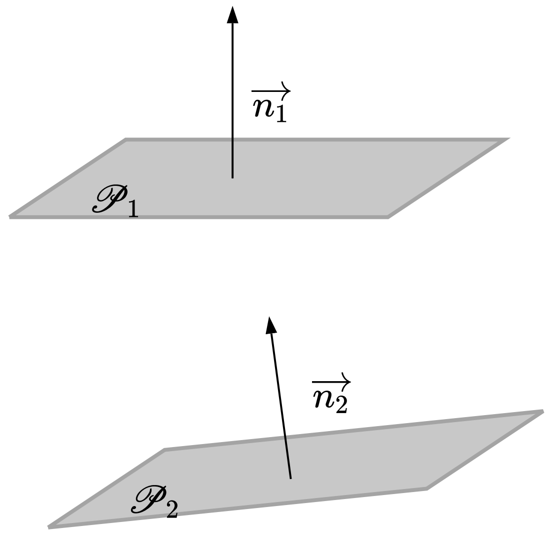
Propriété 10
Soient A et B deux points distincts de l'espace. Le plan médiateur de $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que

2.4 - Position relative de deux plans

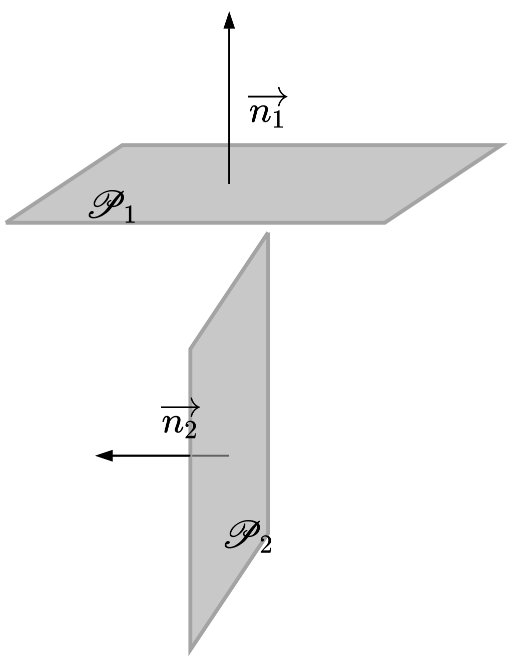
Observons quelques figures.



Les vecteurs normaux sont colinéaires et les plans sont parallèles



Les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires et les plans ne sont pas parallèles



Les vecteurs normaux sont orthogonaux et les plans sont perpendiculaires

Propriété 11
Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans ayant pour vecteurs respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$. Alors :

Remarque 6

La contraposée de cette proposition peut être utilisée pour démontrer que deux plans

Exercice 5

Soient $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ trois plans d'équations respectives :

- $15x + 6y + 3z = 0$,
- $21x + 7y - z = -4$,
- $-5x - 2y - z = 21$.

Déterminer les positions relatives de $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$.

Correction

Soient $\overrightarrow{n_1}$ $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ des vecteurs des plans respectifs

$\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ obtenus à l'aide des des équations cartésiennes.

Nous remarquons que ainsi $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_3}$ sont et les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont

Par ailleurs mais $x_{\overrightarrow{n_1}}$ Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont donc pas et les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$

Puisque $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont et que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas alors $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$

Propriété 12
Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans de vecteurs respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.
les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont

Exercice 6

Avec les mêmes notations qu'à l'exercice précédent, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont-ils perpendiculaires ?

Correction

Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ont pour vecteurs normaux respectifs

Calculons leur produit scalaire :
On peut alors affirmer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$