Terminale ~ Spécialité mathématiques
Fonction logarithme népérien

1 - Quelques questions pour démarrer

- Résoudre $x^2 = 4$.

Correction

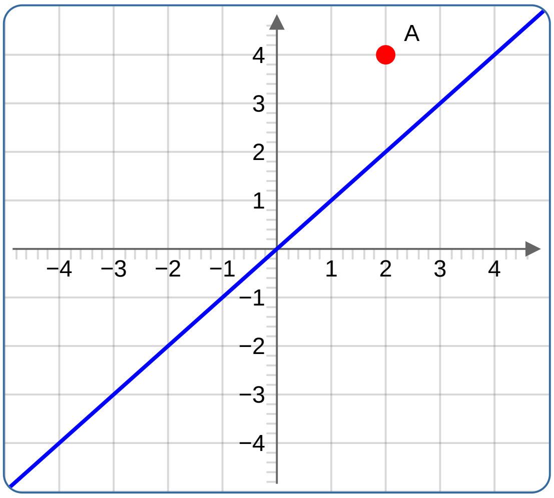
Cette équation possède

- Pour $a > 0$, existe-t-il un nombre positif qui élevé au carré vaut a ?

Correction

En étudiant la fonction f définie sur le théorème de nous assure d'un tel nombre.
Par définition, si $a > 0$, alors est la de l'équation

- Quel est l'image du point $A(2;4)$ par la symétrie d'axe $D : y = x$?



Correction

Le point est le symétrique de A par rapport à D.
Retenons que la symétrie d'axe D :

Ainsi, le point $M(x;y)$ a pour image

- Existe-t-il un nombre strictement positif dont l'exponentielle vaut b ?

Correction

Si $b \leq 0$ la réponse est
Si $b > 0$ le théorème de appliqué à la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
nous permet de répondre par

2 - Définition et propriétés

2.1 - Définition

Définition 1
Pour tout nombre réel b strictement positif, il existe
On appelle ce nombre le
On le note

Exemple 1

-
-

- Pour tout x strictement positif,
- Pour tout x réel,

2.2 - Propriétés algébriques

Propriété 1 -- *Logarithme népérien d'un produit*
Pour tout réel a et b on a :

Preuve
On va calculer et comparer

On a d'une part :

D'autre part :

Or,

D'où,

Propriété 2 -- *Logarithme népérien de l'inverse*
Pour tout réel a on a :

Preuve

On utilise la propriété précédente :

D'où

Propriété 3 -- *Logarithme népérien d'un quotient*
Pour tous réels a et b on a :

Preuve
On utilise les deux propriétés précédentes :

Propriété 4 -- *Logarithme népérien d'une puissance*
Pour tout réel a et tout entier naturel n, on a :

Preuve
Remarquons tout d'abord que :

De même :

En généralisant, pour n assez grand, on a :

Donc,
On répète jusqu'à obtenir :

Remarque 1

Nous aurions pu démontrer directement cette propriété par

Propriété 5 -- *Logarithme népérien d'une racine carrée*
Pour tout réel a on a :

Preuve
On a :

D'où

3 - Fonction logarithme népérien

3.1 - Définition

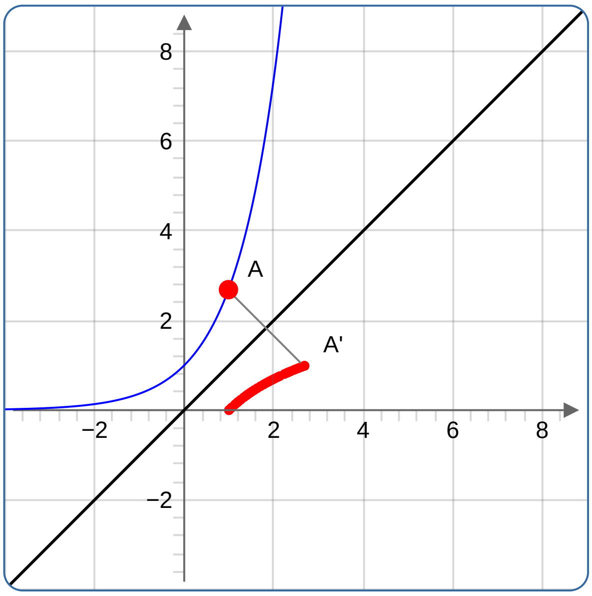
Définition 2
On appelle fonction logarithme népérien, la fonction qui à tout réel x de l'intervalle associe le réel

Remarque 2

- On dit que les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont
  Pour tout réel $x > 0$ et pour tout réel y, on a :

- Dans un repère orthonormal, les courbes (E) et (L), qui représentent respectivement les fonctions $\exp$ et $\ln$, sont

  Pour tout réel $x > 0$ et pour tout réel y on a :
  si et seulement si



3.2 - Dérivabilité et continuité de la fonction ln

Propriété 6 ROC
La fonction $\ln$ est et sur et pour tout réel x strictement positif,

Preuve
Pour tout réel x, $(\exp(x))' =$ donc la courbe représentative de la fonction exponentielle n'admet que des tangentes en chacun de ses points.
Ainsi par symétrie, la courbe représentative de la fonction $\ln$ admet en tout point une tangente
La fonction $\ln$ est donc sur et est donc aussi sur cet intervalle.

Pour le calcul de la dérivée on utilise : $(\mathrm{e}^u)' =$ pour dériver l'égalité

Exercice 1

Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes sur $[0;+\infty[$:

1. $f(x)=\ln(x)+\dfrac{1}{x}$
2. $g(x)=x\ln(x)-x$
3. $h(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

Correction

1. Pour la fonction f, nous dérivons terme à terme :

   $f'(x)=$
2. Pour la fonction g nous utilisons la formule de dérivation d'un produit,

   pour

   $g'(x)=$

   Ce résultat est intéressant. En effet, nous venons de rencontrer une fonction telle que sa dérivée est la fonction On dit que la fonction g est une de la fonction $\ln$.
3. Pour la fonction h nous utilisons la formule de dérivation d'un quotient

   $h'(x)=$

Exercice 2

Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentant la fonction $\ln$ aux points d'abscisse respective e et 1.

Correction

Équation de la tangente en e

Équation de la tangente en 1

Propriété 7

La fonction logarithme népérien est

Preuve

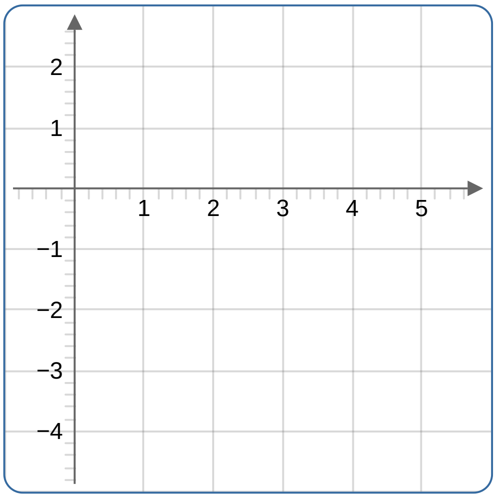
On a vu que pour tout $x > 0$, on a

Propriété 8

- Si $x < 1$ alors
- Si $x > 1$ alors

Remarque 3

Cette propriété (ainsi que la suivante) vient du fait que la fonction $\ln$ est



Propriété 9

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $b > 0$:

Remarque 4

Cette propriété est utile lorsqu'on résoud des

3.3 - Fonctions $\ln(u)$

Propriété 10

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

Si u est et sur I alors la fonction est définie et dérivable sur I et :

Exercice 3

Étudier la fonction définie par $f(x) = \ln(-x^2 + 4x + 5)$ sur $]-1\,;5[$.

Correction

Si on considère le polynôme p défini par $p(x) =$ on a que son discriminant Δ vaut et ses deux racines sont Ce qui justifie bien que l'ensemble de définition de f est

On a alors que pour tout réel $x \in]-1\,;5[$:

Sur $]-1\,;5[$ nous avons que $-x^2 + 4x + 5$ De plus

On a donc le tableau de variations suivant pour f :

Il nous reste à justifier les limites aux
Sur l'intervalle $]-1\,;5[$ le polynôme p est positif, donc lorsque x se rapproche de $-x^2+4x+5$ se rapproche de en étant Or $\ln(X)$ quand X se rapproche de

Ainsi par composition de limites :

Il en est de même lorsque x se rapproche de

3.4 - Croissances comparées

Propriété 11 -- *Croissances comparées 1*

ROC

Preuve
Étude en $+\infty$.
On pose donc
On remarque que :
De plus, on a :

Or, d'après le cours sur la fonction exponentielle,

Donc,

Étude en 0.

On pose donc

On a :
De plus :

Donc d'après le résultat précédent,

Propriété 12 -- *Croissances comparées 2*

Pour tout entier $n \geq 1$,

ROC

Preuve: La démonstration découle immédiatement de la propriété 11 de croissances comparées et les propriétés opératoires des limites.