Terminale ~ Spécialité mathématique
Sommes de variables aléatoires

1 - Opération sur les variables aléatoires

1.1 - Définitions

Définition 1
Une variable X définie sur un univers probabilisé Ω est une définie sur Ω à valeurs dans

On peut noter :

Définition 2
Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs pour $0 \leq i \leq n$, et soient les probabilités associées à ces événements.
de la variable aléatoire X, notée est la des valeurs x_i par leurs probabilités

ou encore

Exercice 1

Voici un jeu de hasard : on lance un dé à six faces équilibré. Si le joueur obtient un 6 il remporte 30 euros. Sinon, s'il obtient un 1, il perd 9 euros et dans les autres cas, il perd 6 euros.
Est-il avantageux de jouer à ce jeu ?

Correction

On note X la variable aléatoire qui donne le obtenu par le joueur. Voici le tableau donnant sa

Pour savoir si il est avantageux de jouer à ce jeu, il nous faut déterminer le gain « » pour un grand nombre de parties, à savoir

Or, $E(X) =$

L'espérance (c'est-à-dire le) étant il de participer à ce jeu.

Définition 3
Soit n un entier naturel non nul.
Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_i, pour $0 \leq i \leq n$, et soient $p_i \in [0; 1]$ les probabilités associées à ces événements. Soit $E(X)$ de X.

• La de la variable aléatoire X, noté est la Cet indicateur représente de X.

ou encore

• On appelle de X le réel noté défini par :

Remarque 1

Soit X une variable aléatoire correspondant au gain lors d'une partie d'un jeu d'argent. Alors $E(X)$ représente le et $\sigma(X)$ représente par rapport à

Voici un autre jeu : on lance une pièce de monnaie, si on obtient pile on gagne 10 euros et si on obtient face on perd 10 euros. En notant X la variable aléatoire associé au gain, on représente la loi de probabilité de X à l'aide du tableau ci-dessous :

x_i		

Nous avons alors :

-
-

Ce que l'on peut interpréter en disant que le gain moyen est

Propriété 1
Soient $p \in [0;1]$ et X une variable aléatoire suivant la loi de de paramètre On a alors :

Preuve
On peut représenter la loi X par le tableau suivant :

x_i		

Ainsi :
$E(X) =$
et
$V(X) =$

1.2 - Addition

Exemple 1

Voici les notes d'un élève à ses quatre DST trimestriels : 8 - 11 - 7 - 6.

Sa moyenne m est donc : $m =$

L'enseignant de cet élève décide d'augmenter toutes les notes de 3 points.

La nouvelle moyenne m' vaut alors : $m' =$

Ainsi, nous voyons que le fait d'augmenter chacune des notes de 3 points a pour conséquence de faire augmenter la moyenne de

Ce qui nous amène à la propriété suivante :

Propriété 2
Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$. Soit a un réel. Alors $X + a$ est également une et son espérance vérifie :

Preuve
Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_i, pour $0 \leq i \leq n$, et soient $p_i \in [0;1]$ les probabilités associées à ces événements.

Pour tout entier i compris entre 1 et n, on a :

Et donc : $P(X = x_i) =$

On a alors les deux tableaux suivants:

k	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = k)$			$\cdots$	

l			$\cdots$	
$P(X + a = l)$			$\cdots$	

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
E(X+a) &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

Exemple 2

Considérons maintenant un élève qui a eu deux notes : 8 et 12.
Sa moyenne est et l'écart-type est de (chacune des notes étant situées à points de la moyenne).
Imaginons maintenant que chacune de ces deux notes sont diminuées de 5 points. Elles deviennent alors : 3 et 7.
La nouvelle moyenne est donc de 5 points inférieures à la précédente, mais nous voyons que les écarts par rapport à la moyenne sont toujours égaux à 2.
Il est intuitif que si toutes les notes sont toutes décalées d'un même nombre alors les écarts restent

Propriété 3
Soit X une variable aléatoire de variance $V(X)$. Soit a un réel. Alors $X + a$ est également une variable aléatoire et sa vérifie :

Et donc :

Preuve
Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_i, pour $0 \leq i \leq n$, et soient $p_i \in [0; 1]$ les probabilités associées à ces événements.
En reprenant les deux tableaux de la preuve précédente, on a :

$$
\begin{aligned}
V(X+a) &= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

On a alors :

Définition 4
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers probabilisé Ω.
On définit la variable aléatoire Z pour tout élément $\omega \in \Omega$ par
La variable aléatoire Z s'appelle alors la **des variables aléatoires X et Y** et on la note

Propriété 4
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers probabilisé Ω. On a :

-
-

Remarque 2

Pour n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on peut définir la variable aléatoire somme et par on obtient la propriété suivante :

Propriété 5
Soient n un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même univers probabilisé Ω. On a alors :

-
-

Remarque 3

On peut noter également :

1.3 - Multiplication

Exemple 3

Si un élève possède une moyenne de 8/10 il semble évident que sa moyenne sur 20 est de ou encore de /100, ou bien de /5.

Propriété 6
Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$. Soit a un réel non nul. Alors $a \times X$ est également une et son espérance vérifie :

Preuve
Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_i, pour $0 \leq i \leq n$, et soient $p_i \in [0;1]$ les probabilités associées à ces événements.
Pour tout entier i compris entre 0 et n, puisque $a \neq 0$, on a :

$$X = x_i \iff$$

et donc : $P(X = x_i) =$

On obtient le tableau suivant :

k	ax_1	ax_2	$\cdots$	ax_n
$P(aX = k)$			$\cdots$	

Ainsi :

$$\begin{aligned} E(aX) &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Exemple 4

Si deux notes sur 10 ont un écart de 3 points, par exemple 4 et 7, alors ces notes calculées sur 20, c'est à dire 8 et 14, ont un écart de points.

Propriété 7
Soit X une variable aléatoire de variance $V(X)$. Soit a un réel non nul. Alors $a \times X$ est également une variable aléatoire et sa variance vérifie :

Et donc :

Preuve
Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_i, pour $0 \leq i \leq n$, et soient $p_i \in [0;1]$ les probabilités associées à ces événements.
En reprenant le tableau de la preuve précédente.

$$\begin{aligned} V(aX) &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Nous avons donc :

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance μ et d'écart-type s.
Déterminer $E\left(\dfrac{X-\mu}{s}\right)$ ainsi que $\sigma\left(\dfrac{X-\mu}{s}\right)$.

Correction

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X-\mu}{s}\right) &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V\left(\frac{X-\mu}{s}\right) &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Ainsi : $\sigma\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) =$

2 - Échantillon d'une loi de probabilité

Définition 5
Soient n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire définie sur un univers probabilisé Ω.
Un de taille n de la loi de X est une de variables aléatoires suivant la même que X.

Exemple 5

Une usine d'emboutillage remplie des bouteilles d'eau pétillante avec un certain volume. On considère la variable aléatoire V qui a toute bouteille lui associe la quantité versée par la chaîne de production en mL.
On s'intéresse à 100 bouteilles à remplir que l'on numérote de 1 jusqu'à 100. On note V_i la variable aléatoire qui associe à la bouteille n° i la quantité de boisson qu'elle va recevoir.
Les réglages de la ligne de production font que l'on peut considérer que les variables aléatoires V_i sont
et suivent toutes la loi de
Ainsi, $(V_1\,;V_2\,;\cdots\,;V_n)$ est un

Définition 6
Soient n un entier naturel non nul, X une variable aléatoire et $(X_1\,;X_2\,;\cdots\,;X_n)$ un de taille n de

- La variable aléatoire de l'échantillon $(X_1\,;X_2\,;\cdots\,;X_n)$ est définie par
- La variable aléatoire de l'échantillon $(X_1\,;X_2\,;\cdots\,;X_n)$ est définie par

Exemple 6

En reprenant l'exemple de l'embouteillage précédent on peut s'intéresser à la variable somme qui modélise la quantité totale de boisson versée pour l'échantillon, ou à la variable moyenne qui modélise la moyenne de boisson versée dans une bouteille.
Si on veut utiliser concrétement ces variables aléatoires (pour le responsable de production par exemple) il faut connaître leur

Propriété 8
Soient un entier naturel non nul et S_n la variable aléatoire associée à un échantillon et de taille n d'une variable aléatoire X. On a alors :

-
-

Preuve
On applique les formules suivantes :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \qquad\qquad \text{et } V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

En effet, en notant $(X_1\,;X_2\,;\cdots\,;X_n)$ l'échantillon de la loi de X on a :

$$E(S_n) =$$

$$V(S_n) =$$

Et puisque $\sigma(S_n) =$ on a bien $\sqrt{S_n} =$

Propriété 9
Soient un entier naturel non nul et M_n la variable aléatoire associée à un échantillon et de taille n d'une variable aléatoire X. On a alors :

-
-

Preuve
On applique les formules $E(aX) =$ et $V(aX) =$ aux résultats de la propriété précédente.

En notant S_n la variable aléatoire associée au même échantillon on a $M_n =$ et :

$E(M_n) =$

$V(M_n) =$

On conclut sur l'écart-type en appliquant la fonction à l'égalité précédente.

3 - Application à la loi binomiale

Propriété 10

ROC

Soient n un entier naturel non nul, $p \in [0;1]$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres
On a alors :

-
-

Preuve