Terminale ∼ Spécialité mathématiques
Primitives / Équation différentielles

1 - Généralités

Définition 1
Soit f une fonction définie et dérivable sur intervalle I.
Une est une équation qui met en relation la variable, la fonction f,
ainsi qu'éventuellement ses

Remarque 1

- Une équation différentielle est une équation ou l'inconnue est une
- Généralement, l'inconnue d'une équation différentielle est notée sa dérivée sa dérivée seconde etc. On peut les noter également y,

Exemple 1

Les deux équations ci-dessous sont des équations différentielles :

- $f' = f$, que l'on peut noter également : ou encore
- $3xf''(x) - (f(x))^2 = 2$, que l'on peut écrire : ou

Définition 2
Soit n un entier naturel. Une équation différentielle d'ordre n est une équation différentielle où la dérivée de plus grand

Exemple 2

- $5y - x^2y' = 0$ est une équation différentielle du
- Pour $\omega \in \mathbb{R}$, $y'' + \omega^2 y = 0$ est une équation différentielle d'ordre

Définition 3
Toute fonction f qui vérifie une équation différentielle est appelée de cette équation.
Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer

Exemple 3

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = -3y$.
En effet,
Cependant, cette fonction n'est pas la solution. Par exemple, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par est également une solution de cette équation différentielle :

Définition 4
Soit n un entier naturel. On considère une équation différentielle d'ordre n d'inconnue y sur un intervalle I, ainsi qu'un réel $x_0 \in I$.
La donnée de ou d'une des dérivées de y en x_0 (par exemple ou $\ldots$)
s'appelle une

Exemple 4

La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = 5\mathrm{e}^{2t}$ est la solution de l'équation vérifiant la condition initiale

2 - Équation différentielle $y' = f$

Définition 5
Soient f et F des fonctions définies sur un intervalle I.
On dit que F est une de f sur I si F est sur I et qu'elle est solution de l'équation différentielle

Remarque 2

En d'autres termes, F est une primitive de f sur I si

Exemple 5

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto 2x$ est une primitive sur

Exercice 1

Trouver des solutions définies sur $\mathbb{R}$ aux équations différentielles suivantes :

1. $y' = x$
2. $y' = x^2 + 1$

Correction

1. est une solution de cette équation.

   La fonction est également une solution.

2. est solution de l'équation.

Propriété 1
Toute fonction sur un intervalle admet des sur cette intervalle

Propriété 2
Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I.
Les primitives de f

Preuve
Soient F et G de f sur I.
La fonction $F - G$ est sur I et sa dérivée vérifie :

Ainsi $F - G$ est sur I et les primitives de f bien d'une constante.

Propriété 3
Soient f une fonction définie sur I et F une primitive de f sur I.
Les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme pour tout $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 6

Les primitives de $x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par avec

Remarque 3

Pour déterminer des primitives, il sera utile de connaître les tableaux ci-dessous. Les deux dernières lignes seront vues dans un prochain chapitre.

Fonction f	Primitive F	Domaine de définition
k constante		
x		
$x^n, n \in \mathbb{N}$		
$\frac{1}{x^2}$		
$\frac{1}{x^3}$		
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$		
$\frac{1}{\sqrt{x}}$		
$\frac{1}{x}$		
$\exp(x)$		
$\cos(x)$		
$\sin(x)$		

Soient u et v deux fonctions dérivables.

Fonction	Primitive
$u' \times (v' \circ u)$	
$u'u^n, n \in \mathbb{N}$	
$\frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}$	

Fonction	Primitive
$\frac{u'}{u}$	
$u'\mathrm{e}^u$	
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	

Fonction	Primitive
$u' \cos(u)$	
$u' \sin(u)$	

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. Déterminer une primive sur $\mathbb{R}$ de f.

2. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

Correction

1. La fonction f est de la forme avec :

   De plus, ainsi, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par est

2. L'expression $\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ est de la forme avec et

   Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

3 - Équation différentielles $y' = ay$

Propriété 4

ROC

On considère l'équation différentielle (E) : avec

1. Les solutions de (E) sont les définies sur $\mathbb{R}$ par :

2. Étant donnés deux réels x_0 et y_0, il existe une solution de (E) vérifiant la condition initiale

   Cette condition permet de déterminer la constante de

Preuve

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par oú C est un réel.

   Alors, Puisque $f'(x) =$ pour tout réel x, f est bien de l'équation differentielle

   Reciproquement, soit f une de l'équation differentielle (E) et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

   La fonction g est sur $\mathbb{R}$ et

   Puisque f est solution de (E), pour tout réel x et ainsi :

   La fonction g est il existe donc un réel C tel que c'est-à-dire :

   Puisque e^{-ax} est different de pour tout réel x, on obtient:

2. Une solution de (E) est de la forme

   De plus, donc et c'est-à-dire

   Ainsi, la fonction définie pour tout réel x par

Exercice 3

Résoudre l'équation différencielle (E) : $y' = 8y$, puis déterminer la solution vérifiant $y(-1) = 1$.

Correction

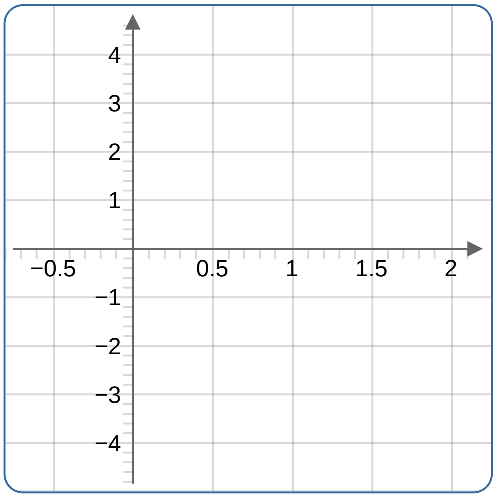
Les solutions de (E) sont toutes les définies sur par

Pour la solution particulière vérifiant on a :

Ainsi la solution cherchée est

Exemple 7

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -2y$, sont les fonctions On peut observer leur courbe dans le graphique ci-dessous.



Propriété 5
On considère l'équation différentielle (E) : avec On note deux solutions de (E) et k un réel.
La fonction somme et la fonction sont également des de (E).

4 - Équation différentielles $y' = ay + b$

Propriété 6
On considère l'équation différentielle (E) : avec a et b

1. Les solutions de (E) sont les définies sur par :
 où C est une

2. Étant donnés deux réels il existe une solution de (E) vérifiant la condition

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y + 2$ avec $y(0) = 1$.

Correction

Les solutions de l'équation sont de la forme

De plus, donc c'est-à-dire

La solution cherchée est donc la fonction définie sur par

5 - Guide de résolution des équations différentielles du type $y' = ay + f$

Pour résoudre une équation différentielle (E) de la forme l'énoncé nous guide en respectant les étapes suivantes:

1. On cherche une solution φ (en pratique, il suffit de vérifier que la fonction indiquée par l'énoncé convient);
2. On montre que y est solution de (E)
3. On résout l'équation homogène
4. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) s'écrivent alors :

Exercice 5

Soit (E) l'équation différentielle : $y' = 2y + x^2$

1. Montrer que la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une solution de particulière de (E).
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2y$.
3. Résoudre alors l'équation (E).

Correction

1. Pour tout réel x,

   De plus :

   La fonction g est bien
2.
3.

   Les solutions de l'équation $y' = 2y$ sont de la forme

   Donc, est solution de si et seulement si

   c'est-à-dire tel que

   Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :