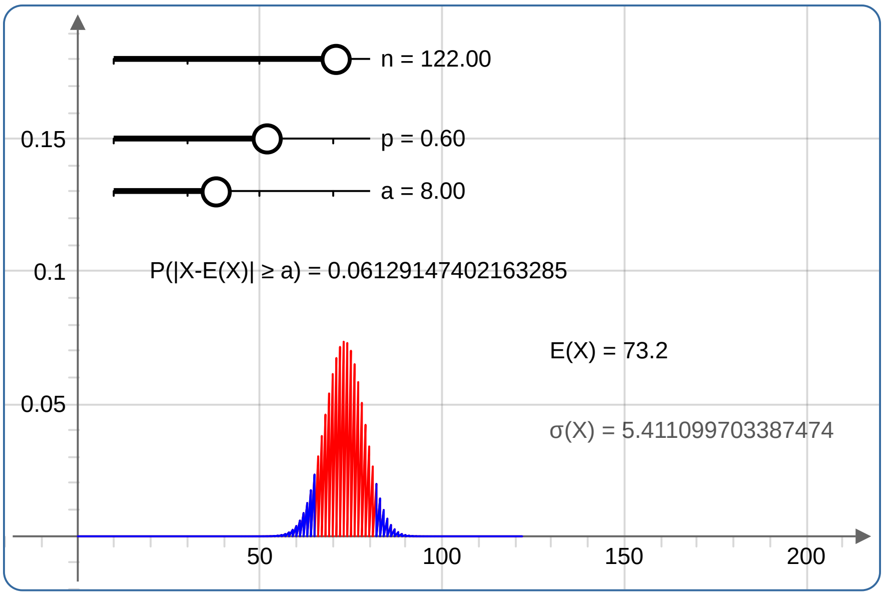
Terminale ∼ Spécialité mathématique
Concentration / loi des grands nombres

1 - Introduction

Soient n un entier naturel non nul, $p \in [0\,;1]$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
On s'intéresse à la probabilité que X soit



On remarque ici que plus a est   plus la probabilité que X soit à une distance supérieure à a de $E(X)$ est

Exemple 1

On considère une pièce de monnaie équilibrée. On veut savoir combien de fois au maximum il faut la lancer pour que la probabilité d'être à plus ou moins 10 réalisations de l'espérance soit de moins de $0,01$.
À l'aide du graphique précédent, en fixant p à a à   et en faisant varier n jusqu'à obtenir
$P(|X - E(X)| \geq a)$ on trouve

2 - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 1 -- *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*
Soit X une variable aléatoire dont on note respectivement $E(X)$ et $V(X)$ son espérance et sa variance.

Exemple 2

La moyenne du QI standard est de 100 est l'écart-type est de 15. Certaines personnes estiment qu'un individu donné est d'intelligence moyenne si son QI est situé à plus ou moins deux écart-types du score moyen.
On considère X la variable aléatoire qui pour une personne donnée associe son QI.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a :

La probabilité qu'une personne ne soit pas d'intelligence moyenne est donc

À noter que $0,25$ est un de la probabilité considérée. Celle-ci peut d'ailleurs être bien plus

3 - Loi des grands nombres

Propriété 2 -- *Inégalité de concentration*
Soit X une variable aléatoire dont on note respectivement $E(X)$ et $V(X)$ son espérance et sa variance.
On considère M_n la variable aléatoire d'un échantillon de taille n de loi de X.

Pour tout réel $a > 0$,

Exemple 3

On lance une pièce de monnaie équilibrée et on note X la variable aléatoire qui vaut 0 lorsqu'on obtient face et 1 pour pile.
On s'intéresse à un échantillon de taille $1\,000$ de la loi de X et on note M_n la variable moyenne associée. On veut connaître une majoration pour la probabilité que la moyenne de l'échantillon soit à plus de 10^{-1} de $0,5$.
D'après l'inégalité de concentration on a :

Ce que l'on peut traduire en disant que pour $1\,000$ lancers d'un pièce de monnaie équilibrée, la probabilité que la de piles obtenue soit entre est de

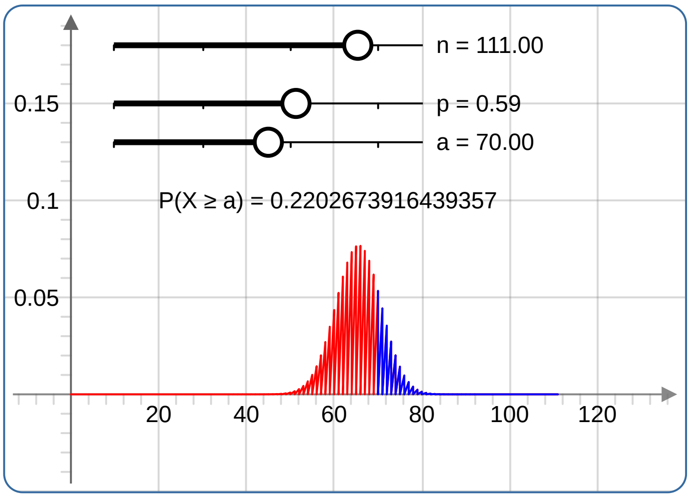
Propriété 3 -- *Loi faible des grands nombres*
Soit X une variable aléatoire et un échantillon de taille de n de loi de X. On note M_n la variable aléatoire associée à cet échantillon.
Pour tout réel $a > 0$,

Remarque 1

On peut interpréter la loi faible des grands nombres en disant que plus la taille d'un échantillon est plus la probabilité que la valeur de l'échantillon s'écarte de l'espérance est

4 - Annexe - Inégalité de Markov et démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soient n un entier naturel non nul, $p \in [0\,;1]$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
On observe sur le graphique que plus a est grand, plus la probabilité que X soit supérieur à a est petite.



L'algorithme ci-dessous permet d'afficher la $P(X \geq a)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n\,;p)$.

```
def facto(n):
    f = 1
    for i in range(1,n+1):
        f = f*i
    return f

def binom(n,p,k):
    return (1.0*facto(n))/(facto(k)*facto(n-k))*(p**k)*((1-p)**(n-k))

def proba(n,p,a):
    r = 0
    for i in range(a,n+1):
        r = r+binom(n,p,a)
    return r

print( proba(100,0.5,60) )
```

Propriété 4 -- *Inégalité de Markov*
Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et d'espérance $E(X)$.
Pour tout réel $a > 0$, $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$.

Preuve
Notons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n valeurs de X. Par définition de l'espérance on a :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

On peut alors séparer le sigma en deux, en considérant les valeurs de x_i telles que $x_i < a$ ou $x_i \geq a$. Ainsi :

$$E(X) = \sum_{x_i<a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i).$$

La variable aléatoire X étant à valeurs positives on a que $x_i \geq 0$ et puisque une probabilité est également positive on a : $\displaystyle\sum_{x_i<a} x_i P(X = x_i) \geq 0$ et :

$$E(X) \geq \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i).$$

On peut alors minorer chacun des x_i par a, ce qui donne : $\displaystyle E(X) \geq \sum_{x_i \geq a} aP(X = x_i)$,

Or, $\displaystyle\sum_{x_i \geq a} aP(X = x_i) = a \sum_{x_i \geq a} P(X = x_i) = aP(X \geq a)$.

Ainsi on a bien : $E(X) \geq aP(X \geq a)$, c'est-à-dire, puisque $a > 0$, $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$.

Exercice 1

En France, la taille moyenne d'une femme adulte est de 165 cm. On note X la variable aléatoire qui pour une adulte donnée associe sa taille.
Déterminer, à l'aide de l'inégalité de Markov, un majorant de la probabilité que cette femme mesure plus de 180 cm (taille moyenne des mannequins)

Correction

On cherche ici $P(X \geq 180)$. L'énoncé nous donne $E(X) = 165$. Ainsi d'après l'inégalité de Markow on a :
$P(X \geq 180) \leq \dfrac{E(X)}{180}$ soit $P(X \geq 180) \leq \dfrac{165}{180} \simeq 0,917$.
Ce qui nous permet de conclure que la probabilité qu'une femme ait une taille supérieure à 180 cm est inférieure à

$0,917$.
Résultat à ne pas confondre avec une approximation de cette probabilité.

Propriété 5 -- *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*
Soit X une variable aléatoire dont on note respectivement $E(X)$ et $V(X)$ son espérance et sa variance.
Pour tout réel $a > 0$, $P(|X - E(X)| > a) \leq \dfrac{V(X)}{a}$.

Preuve
Comme $a > 0$, les inégalités $|X - E(X)| > a$ et $(X - E(X))^2 > a^2$ sont équivalentes.
De plus, la variable $(X - E(X))^2$ est positive ou nulle On peut donc lui appliquer l'inégalité de Markov. Ainsi :

$$P\left(|X - E(X)|^2 > a^2\right) \leq \frac{E\left((X - E(X))^2\right)}{a^2}.$$

Or, par définition, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ donc :

$$P\left((X - E(X))^2 > a^2\right) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

On peut alors conclure : $P(|X - E(X)| > a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$.