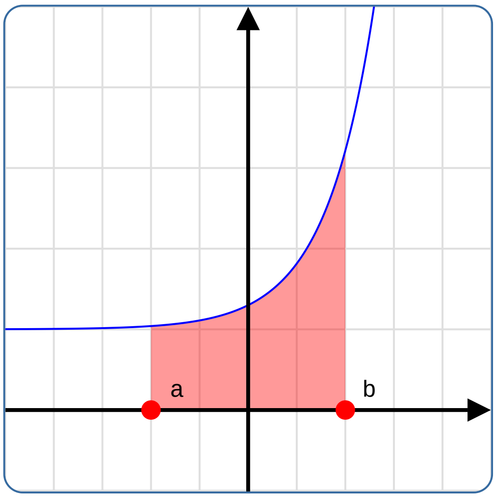
Terminale ~ Spécialité mathématique
Intégration

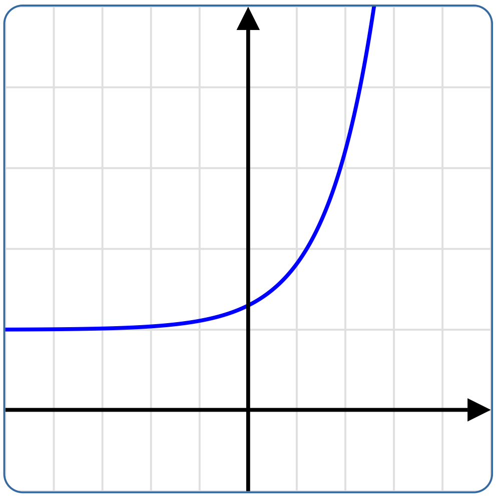
1 - Aire sous une courbe

1.1 - Méthode des rectangles

Étant donnée la courbe d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, nous cherchons à approcher l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



Une idée est d'approcher la valeur de cette aire en construisant plusieurs rectangles entre l'axe des abscisses et la courbe.
Nous remarquons alors, que plus le nombre de rectangles est important, plus nous nous approchons de l'aire du domaine cherchée. Cependant, ceci est une méthode itérative et nous souhaiterions obtenir des résultats théoriques, valables pour un grand nombre de fonctions.
Le but de ce chapitre sera donc de déterminer les conditions (quels types de fonctions ?) pour lesquelles nous pourrons déterminer la valeur de l'aire sous une courbe, mais nous verrons également les conséquences de ces résultats que nous pourrons exploiter au delà du domaine du calcul d'aire.

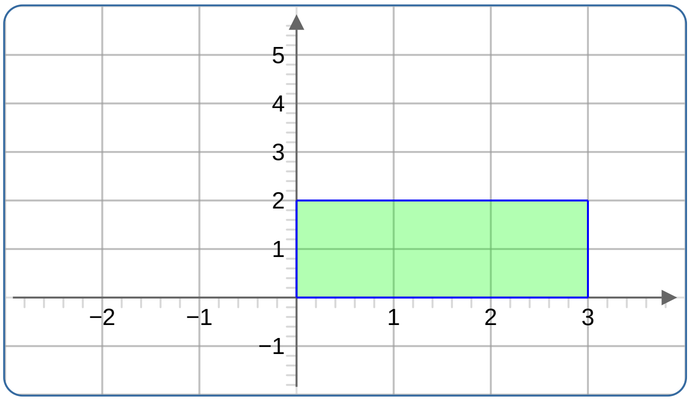


1.2 - Calcul d'aire dans un repère orthogonal

Exercice 1

On se place dans le repère orthogonal ci-dessous, où l'unité sur l'axe des abscisses mesure 2 cm et celle sur l'axe des ordonnés 1 cm.

1. Déterminer la mesure en unité d'aire du rectangle construit.
2. Déterminer cette mesure en cm^2.



Correction

1. Ce rectangle a pour dimensions unités en longueur et unités en largeur, son aire est donc de

   En comptant sur le graphique nous voyons bien que le "grand" rectangle vert est composé de six "petits"

2. Sachant que l'unité sur l'axe des abscisses mesure et celle sur l'axe des ordonnées nous avons que le rectangle mesure Ainsi le rectangle considéré possède une aire de

Remarque 1

On fera attention à bien faire la différence entre les unités utilisées. La démarche la plus sûre étant de calculer dans un premier temps en unité d'aire, puis de convertir dans l'unité demandée.

2 - Définition et propriétés

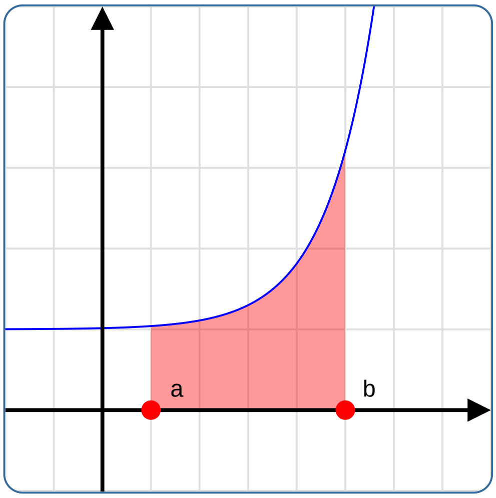
2.1 - Définition

Définition 1

Soit f une fonction et sur un intervalle $[a\,;b]$ (c'est-à-dire que :).

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

de a à b de f est du domaine du plan compris entre la droite d'équation la courbe la droite d'équation et l'axe On note ce nombre :



Remarque 2

1. Pour toute fonction f positive et continue sur un intervalle $[a\,;b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est

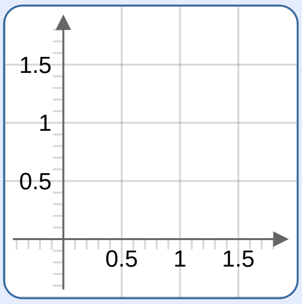
2. La variable x dans l'écriture d'une intégrale est on pourrait la noter avec une autre lettre :

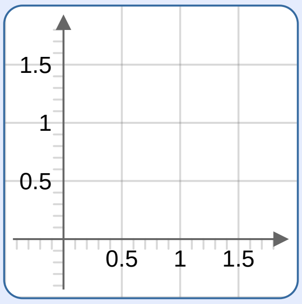
Exercice 2

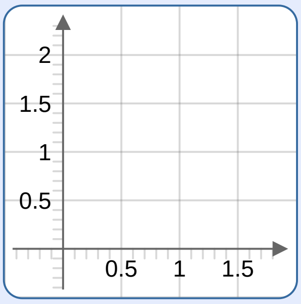
Déterminer la valeur des intégrales suivantes : $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}x \quad \int_0^1 1\times \mathrm{d}x \quad \int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x$.

Correction

Il nous faut construire ici les courbes représentatives des fonctions : et et calculer les des domaines entre les l'axe des et les droites d'équation





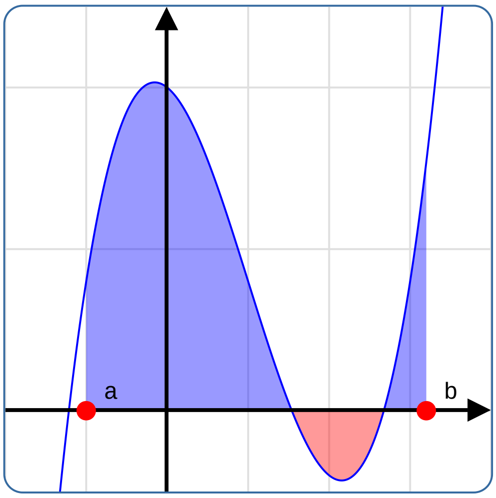


À l'aide des formules des aires d'un triangle d'un carré, et d'un trapèze on obtient :

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x = \qquad \int_0^1 1\times\mathrm{d}x = \qquad \int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x =$$

Nous remarquons ici que : $\int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_0^1 1\times\mathrm{d}x =$ ce que l'on peut voir sur les graphiques en imaginant que le triangle et le carré "s'ajoutent" pour former le trapèze.

Définition 2
Soit f une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Le nombre réel $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire du domaine du plan précédent comptée lorsque $\mathcal{C}_f$ est de (Ox), et lorsque $\mathcal{C}_f$ est



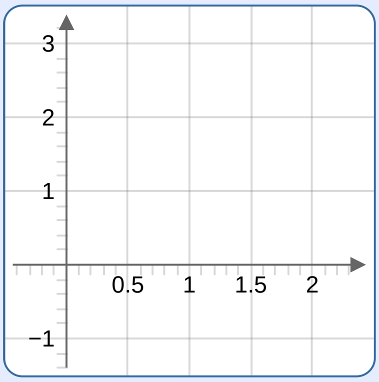
Exercice 3

Déterminer la valeur de $\int_0^2 (2x-1)\mathrm{d}x$.

Correction

Observons tout d'abord la courbe de la fonction

Nous voyons que la fonction s'annule en L'intégrale cherchée sera donc la différence entre l'aire du triangle et l'aire du triangle



Ce résultat se vérifie en ajoutant les carreaux (ou demi-carreau) bleus et en soustrayant les rouges.

Définition 3
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
On pose alors :

Exemple 1

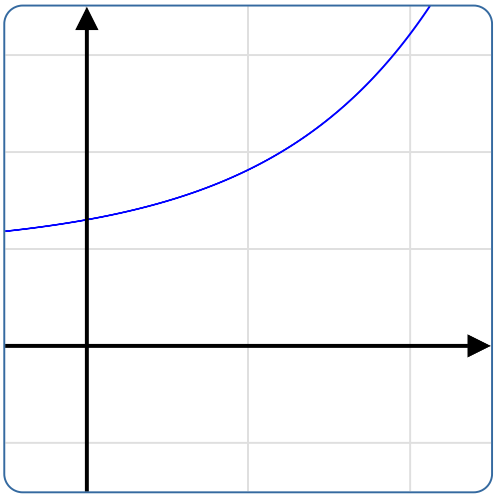
Nous avions vu que $\int_0^1 x\mathrm{d}x =$ donc d'après cette définition : $\int_1^0 x\mathrm{d}x =$

Propriété 1 -- *Relation de Chasles*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soient a, b et c des éléments de I. On a alors :

Remarque 3

Cette propriété signifie que si on découpe un domaine en deux alors la somme des aires des deux nouveaux domaines est égale à l'aire totale.
Dans le graphique précédent l'aire du domaine entre a et c est égale à la somme des aires des domaines coloriés en (entre) et en (entre).



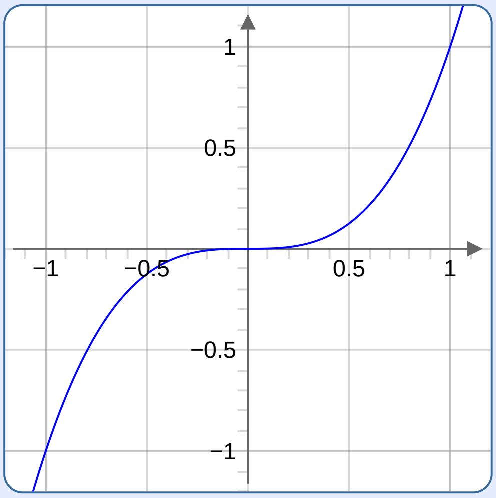
Exercice 4

À l'aide de la relation de Chasles montrer que $\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = 0$.

Correction

La fonction cube étant les aires des domaines sur $[-1\,;0]$ et $[0\,;1]$ sont
En effet, la courbe étant du repère les aires sont La partie de gauche de la courbe étant de l'axe des abscisses l'aire du domaine sur $[-1\,;0]$ est compté On a alors :

$$\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x =$$



Propriété 2 -- *Linéarité*

Soient $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.

2.

Exemple 2

Nous avions déjà vu que : $\int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_0^1 1 \times \mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x$.

Et pour illustrer le deuxième point, nous avons, par exemple : $\int_0^1 5x^2\mathrm{d}x =$

Propriété 3 -- *Positivité*
Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

Si pour tout $x \in [a\,;b]$, alors

Remarque 4

Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx$

En effet, si $f(x) \leq 0$ alors $-f(x)$ et donc : $\int_a^b -f(x)dx$

Par linéarité nous avons alors : $-\int_a^b f(x)dx$

Et : $\int_a^b f(x)dx$

Propriété 4 -- *Positivité*
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$.

Si pour tout $x \in [a\,;b]$, alors

Preuve
Pour tout $x \in [a;b]$, on a :

$$f(x) \leq \qquad g(x)$$

$\iff$

$\implies$

$\implies$

$\implies$

Exemple 3

Nous avons que : $\int_1^{10} x^2\mathrm{d}x \qquad \int_1^{10} x^3\mathrm{d}x$.

En effet sur l'intervalle $[1\,;10]$, $x^2 \qquad x^3$.

Nous avons également : $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$ car sur l'intervalle $[0\,;1]$: x^3 x^2.

2.2 - Valeur moyenne d'une fonction

Définition 4
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La valeur de f sur $[a\,;b]$ est donnée par le nombre réel :

Exercice 5

La vitesse v, exprimée en $\mathrm{km.h}^{-1}$ d'un véhicule est définie par $v(t) = 20t$, où t représente le temps exprimé en heure sur l'intervalle $[0\,;4]$.
Déterminer la vitesse moyenne du véhicule entre 0h et 4h.

Correction

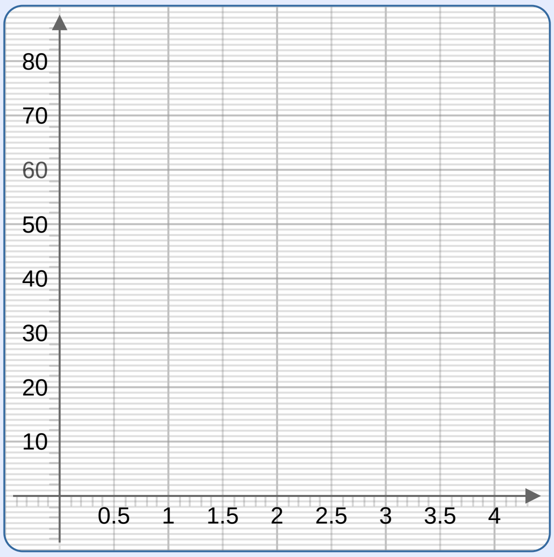
D'après la définition précédente la vitesse moyenne du véhicule sur

l'intervalle $[0\,;4]$ est donnée par :

Calculons l'intégrale à l'aide du graphique ci-contre.
L'aire du triangle bleu (et donc de) vaut :

Ainsi la vitesse moyenne

cherchée vaut :



Propriété 5 -- *Inégalité de la moyenne*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On considère m et M deux réels tels que : pour tout $x \in [a\,;b]$, On a alors :

Remarque 5

Propriété que l'on peut traduire en disant que la valeur d'une fonction est comprise entre la valeur et la valeur de cette fonction.

Preuve
Pour tout $x \in [a;b]$:

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

Exemple 4

Pour tout réel $t > 0$, $4\ln(2) \leq \int_1^5 \ln(1+t)\mathrm{d}t \leq 4\ln(6)$.

En effet, la fonction est sur sa dérivée étant

Cette fonction est donc par sa valeur en 1 et par sa valeur en 5. C'est-à-dire, que pour tout réel $t \in [1\,;5]$:
Ainsi, en appliquant l'inégalité de la on obtient :

Ce qui donne :

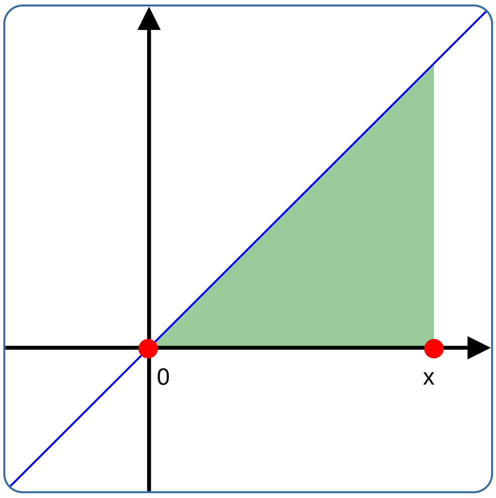
3 - Intégration et primitives

3.1 - Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminons $\int_0^x t\mathrm{d}t$.

Construisons le graphique pour calculer l'aire du domaine considéré.

L'aire du domaine vaut : et donc



Nous remarquons donc, dans ce cas précis qu'il y a un lien entre la fonction dont on cherche à calculer l'intégrale, et une de cette fonction. Ici nous avons bien que la dérivée de $t \mapsto \frac{1}{2}t^2$ est

et on se pose la question si ce résultat peut se généraliser à toute fonction continue dont on chercherait à calculer une intégrale.

3.2 - Intégrale et primitive

Propriété 6
Soit f une fonction sur un intervalle $[a;b]$. Alors la fonction F définie sur $[a\,;b]$ pa

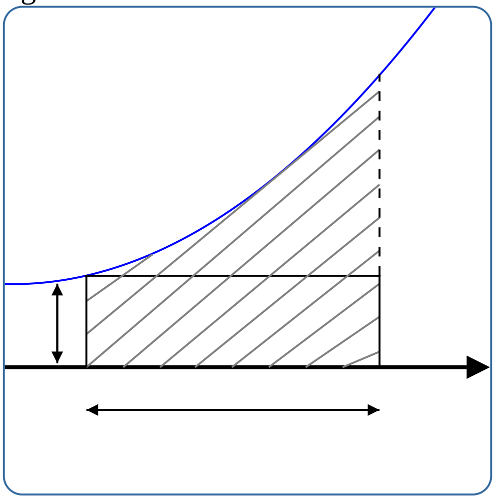
ROC

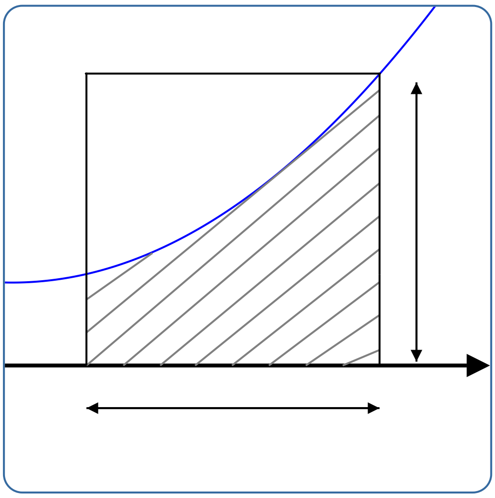
est sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée

Preuve
On démontre ce résultat dans le cas où f est continue, positive et
Notre but est de montrer que

Nous avons :

La fonction f étant l'aire sous la courbe, , ici hachurée, est par l'aire des deux rectangles vert et bleu ci-dessous :





L'aire du rectangle vert vaut : et celle du rectangle bleu :

On obtient donc l'encadrement suivant :

Or,

Ainsi, par

Propriété 7
Toute fonction sur un intervalle admet sur cet intervalle.

Preuve

La proposition précédente (la numéro 6) nous permet d'obtenir le résultat : « Toute fonction positive et continue possède ».

Il nous reste donc à démontrer le résultat pour une fonction de

On admettra pour cela que sur un intervalle $[a\,;b]$, toute fonction continue possède un

Soit f, une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, et

Si m est positif, alors f et d'après la propriété précédente, est une primitive de f.

Si m est négatif, on définit alors sur $[a\,;b]$ la fonction g, par

Le minimum de f étant m, celui de g est cette dernière fonction est donc et possède une que l'on note

On définit alors la fonction F par

On obtient :

Ainsi, nous avons bien déterminé pour f.

Propriété 8
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, et soit F une primitive de f. Alors :

ROC

Preuve

D'après la propriété 7 la fonction G définie pour tout $x \in [a\,;b]$ par

Ainsi, on a bien

Soit F une

Exemple 5

Graphiquement, nous avons vu que $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Une primitive de la fonction $f : x \mapsto x$ est et :

Ce résultat illustre donc la propriété.

Remarque 6

On notera, de manière plus condensée :

Propriété 9
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ fixé. Alors, la fonction F définie sur I par

est de f qui

Exemple 6

Nous avons, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

3.3 - Intégration par parties

Propriété 10
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$ telles ques u' et v' sont continues sur $[a\,;b]$. O
alors :

ROC

Preuve
Pour tout $x \in [a\,;b]$, on a

C'est-à-dire :

Par hypothèse chacune des fonctions de l'égalité précédente sont elles admettent donc des et on peut calculer leur sur $[a\,;b]$.

On a ainsi :

Exercice 6

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

Correction