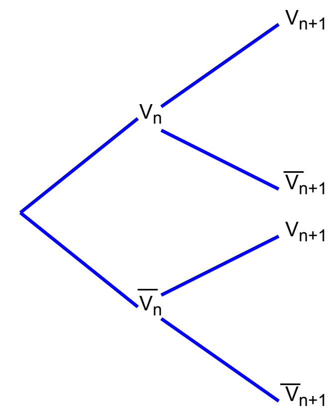
DM ~ Probabilités

Exercice 1



Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsqu'un sondage permet la découverte de vestiges, il est dit positif.
On note V_n l'événement : « le $n^{\text{ième}}$ sondage est positif » et p_n sa probabilité.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
   A : « les deuxième et troisième sondages sont positifs »;
   B : « les deuxième et troisième sondages sont négatifs ».
   On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité p_3 pour que le troisième sondage soit positif.
3. Le nombre n désigne un entier naturel, $n \geq 2$.
   a. Recopier et compléter l'arbre de l'énoncé.
   b. Établir pour tout entier naturel n non nul, que $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
4. On note (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,2$.
   a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique.
   b. Exprimer u_n, puis p_n en fonction de n.
   c. Calculer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.
   d. Écrire un algorithme Python pour déterminer le premier entier n tel que $p_n < 0,2 - 10^{-12}$.
   On pourra s'inspirer de la correction de l'exercice 1 du cours n°1.

Exercice 2

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les $1\,200$ personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.
Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour lecandidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.
On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
   b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.
4. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est $0,4$.
   L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 100 réponses par jours.
   a. L'institut de sondage appelle 20 personnes. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes parmi ces 20 qui acceptent de répondre à l'enquête.
   Quelle loi de probabilité suit X. On précisera ses paramètres.
   b. Calculer $P(6 \leq X \leq 10)$.

c. Soit n un entier naturel non nul. L'institut de sondage appelle n personnes. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes parmi ces n qui acceptent de répondre à l'enquête.
On souhaite déterminer la valeur minimale de n pour que $P(Y \geq 100) > 0,95$.
Compléter les pointillés de l'algorithme ci-dessous pour qu'il réponde à cette question.

```
def facto(n):
    f = 1
    if n > 1:
        for i in range(1,n+1):
            f = f*i
    return f

def comb(n,k):
    return facto(n)/(facto(k)*facto(n-k))

def binom(n,p,k):
    s = p**k
    e = (1-p)**(n-k)
    return comb(n,k)*s*e

def binomInf(n,p,k):
    r = 0
    for i in range(0,k+1):
        r = r+binom(n,p,i)
    return r

def binomSup(n,p,k):
    return 1-binomInf(n,p,...)

def seuil(p,barre):
    n = barre
    while binomSup(n,p,barre) <= 0.95:
        n = n+1
    return ...

print(seuil( ... , ... ))
```

d. À partir du résultat affiché par cet algorithme, déterminer le nombre d'heures pendant lequel l'institut de sondage doit passer des appels pour atteindre cet objectif. Est-il réalisable en une journée ?

5. L'institut de sondage décide d'interroger 300 personnes. On note Z la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes parmi ces 300 qui acceptent de répondre à l'enquête.
   a. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le plus grand entier a tel que $P(Z \leq a) \leq 0,025$.
   b. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le plus grand entier b tel que $P(Z \leq b) \leq 0,975$.
   c. Que représente l'intervalle $[a\,;b]$ pour l'institut de sondage ?

Exercice 3

Soit b un entier naturel choisi aléatoirement entre 1 et 10.
On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f, pour tout x par :

$$f(x) = (x+b)\mathrm{e}^{-bx}.$$

1. Montrer que pour tout x, $f'(x) = (1 - b^2 - bx)\mathrm{e}^{-bx}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Justifier que f atteint son maximun en $x = \dfrac{1}{b} - b$.
4. Quelle est la probabilité que f ne soit pas majorée par $1\,000$?

Exercice 4

Soient a et c deux entiers choisis aléatoirement 0 et 10.
Quelle est la probabilité que le polynôme $P(x) = ax^2 + 5x + c$ possède deux racines distinctes ?