

DM ~ Méthode d'Euler

On s'intéresse dans ce devoir à une fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} , dont on note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

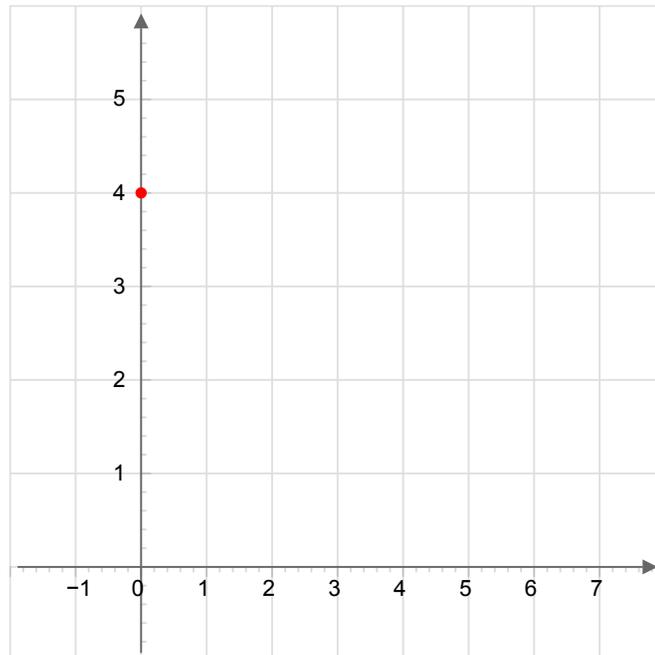
Cette fonction vérifie $f(0) = 4$ et pour chacun des point de sa courbe \mathcal{C} , le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C} est égale à l'opposé de la moitié de son ordonnée.

1. Pour tout réel x trouver une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$.
2. En partant du principe que localement une courbe et sa tangente sont très proche, on admet qu'étant donné un point M de \mathcal{C} et la tangente correspondante T , un point de T proche de M est aussi proche de \mathcal{C} .

Dans le graphique ci-dessous on a tracé le point $(0; 4)$ de \mathcal{C} .

On utilisera le document du site pour les instructions suivantes.

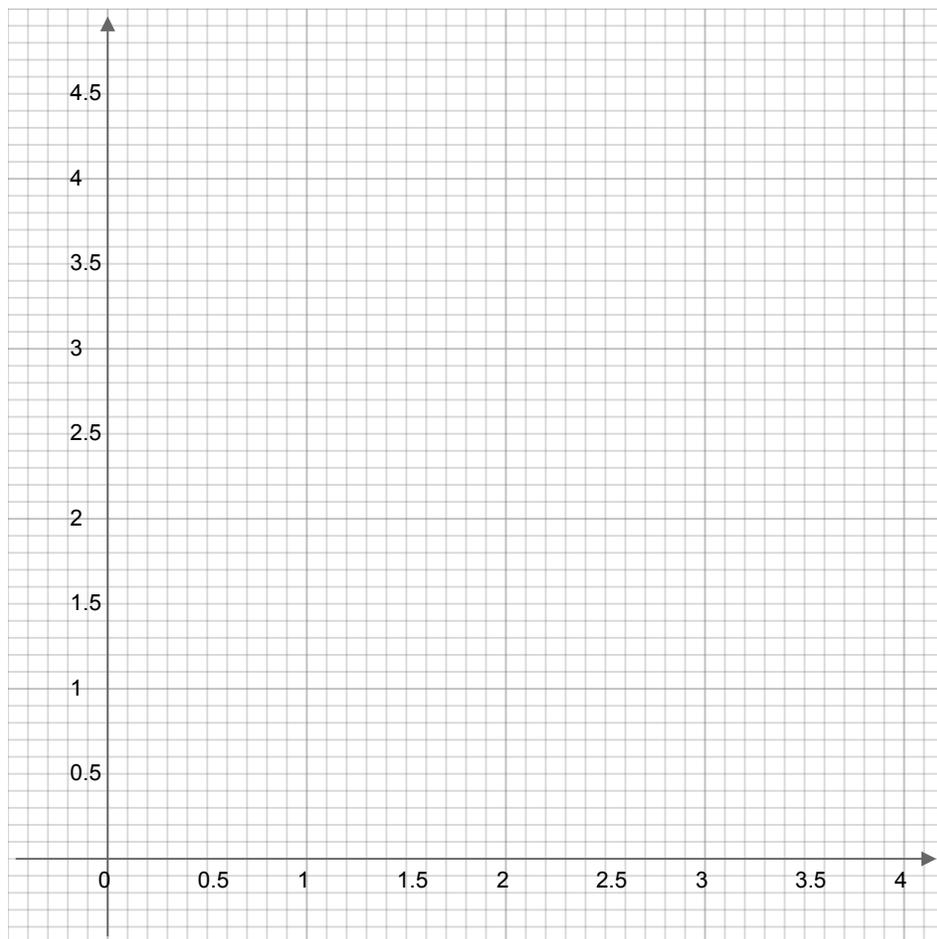
- Cliquer sur ce point pour faire apparaître la tangente à \mathcal{C} associée. On remarquera que son coefficient directeur vaut bien -2 qui est la moitié de l'opposé de 4 .
- Cliquer ensuite sur un point de cette tangente qui est proche du point de coordonnées $(0; 4)$, tout en étant à sa droite.
On obtient alors un point qui est proche d'un point de \mathcal{C} .
- Répéter l'opération une dizaine de fois avec chaque nouveau point créé, en allant jusqu'à la droite du graphique pour obtenir une approximation de \mathcal{C} .
- Repartir du point initial $(0; 4)$ mais en allant cette fois-ci vers la gauche pour compléter l'approximation de \mathcal{C} .
- Imprimer ou envoyer le graphique.



3. À partir du graphique précédent, conjecturer la famille de fonction à laquelle semble appartenir f .
4.
 - a. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_0 à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 .
 - b. Déterminer l'ordonnée du point d'abscisse $0,5$ de T_0 et expliquer pourquoi ce nombre peut être considéré comme une valeur approchée de $f(0,5)$.
 - c. Déterminer alors, en utilisant cette valeur approchée de $f(0,5)$, l'équation réduite de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse $0,5$.
 - d. En déduire selon la même méthode une valeur approchée de $f(1)$.
 - e. Compléter le tableau suivant :

x_0	Équation de la tangente en x_0	Valeur approchée de $f(x_0 + 0,5)$
0		
0,5		
1		
1,5		
2		
2,5		
3		
3,5		
4		

f. Placer les points obtenus dans le tableau précédent dans le repère ci-dessous :



5. Pour obtenir un plus grand nombre de points, la méthode précédente est difficilement applicable avec de tels calculs à la main. On utilise donc un algorithme en Python.
On cherche à établir tout d'abord des résultats qui nous seront utiles pour cet algorithme.

a. On considère un point $M(t; f(t))$ de \mathcal{C} . Montrer que l'équation réduite de la tangente T_t à \mathcal{C} en M est :

$$y = -\frac{1}{2}f'(t)(x - t) + f(t).$$

b. Déterminer une expression simple des coordonnées du point de T_t d'abscisse $t + 0, 1$.

c. On applique dans cette question la méthode de la question 4 pour un pas de $0, 1$ à la place de $0, 5$.

En utilisant la question précédente, compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche les coordonnées de tous les points obtenus par cette méthode entre 0 et 4 .

```
1 x = 0
2 y = 4
3 while x < 4:
4     x = x+0.1
5     y =
6     print([x,y])
```

d. L'algorithme suivant, n'est pas écrit en Python, mais permet de tracer les points obtenus par la méthode précédente. Compléter le pour obtenir le graphique associé.

```
1 Xmin = -0.5
2 Xmax = 4.2
3 Ymin = -0.5
4 Ymax = 5
5 traceG()
6 traceX()
7 traceY()
8 couleur = bleu
9 x = 0
10 y = 4
11 point([x,y])
12 while( x < 4 ){
13     x = x + 0.1
14     y =
15     point([x,y])
16 }
```

e. Modifier cet algorithme pour obtenir plus d'une centaine de points sur $[0; 10]$. On pensera à modifier, entre autre, la ligne n°2.

```
1 Xmin = -0.5
2 Xmax = 4.2
3 Ymin = -0.5
4 Ymax = 5
5 traceG()
6 traceX()
7 traceY()
8 couleur = bleu
9 trait = 0.2
10 x = 0
11 y = 4
12 point([x,y])
13 while( x < 4 ){
14     x = x + 0.1
15     y =
16     point([x,y])
17 }
```