DM ~ Arithmétique

1 Triplets pythagoriciens

Soient x, y et z trois entiers naturels. On considère l'équation (E) :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Toute solution dans $\mathbb{N}$ de (E) est appelé **triplet pythagoricien**.

1. Montrer que $(3\,;4\,;5)$ est un triplet pythagoricien puis déterminer un triplet pythagoricien dont un des termes vaut 500 et les autres sont non nuls.
2. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, dont on expliquera les lignes 4 et 5, déterminer la probabilité qu'un triplet soit un triplet pythagoricien lorsque chacun des nombres le composant est compris entre 0 et 100.

```python
1 from math import floor, sqrt
2 c = 0
3 for i in range(0,101):
4   for j in range(0,101):
5       if sqrt(i**2+j**2) == floor(sqrt(i**2+j**2)):
6         if i**2+j**2 < 10001:
7           c = c+1
8 print(c)
```

3. Montrer qu'un triplet pythagoricien ne contenant pas 0 ne peut contenir deux termes identiques.
4. Soit $(x\,;y\,;z)$ un triplet pythagoricien et d un diviseur commun à x, y et z.
   Montrer que $\left(\dfrac{x}{d}\,;\dfrac{y}{d}\,;\dfrac{z}{d}\right)$ est un triplet pythagoricien.
5. Soient u et v deux entiers naturels tels que $u > v$. Montrer que le triplet $(u^2 - v^2\,;2uv\,;u^2 + v^2)$ est un triplet pythagoricien.
6. À partir de la question précédente, déterminer un triplet pythagoricien dont tous les termes sont supérieurs à $1\,000$ en détaillant les calculs.

2 Égalité de Sophie Germain

Pour tout entier naturel n, on définit le nombre $P(n) = n^4 + 4$ et on cherche à déterminer pour quelles valeurs de n, $P(n)$ est premier.

1. Déterminer si $P(15)$ et $P(17)$ sont des nombres premiers ou non.
2. Soient n et m deux entiers naturels. Montrer que :

$$n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn).$$

3. En déduire une factorisation pour $P(n)$.
4. Déterminer alors que $n^4 + 4$ est premier si et seulement si $n = 1$.
5. Démontrer que $4^{545} + 545^4$ n'est pas premier.