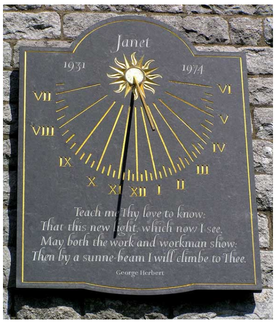
DM sur les cadrans solaires

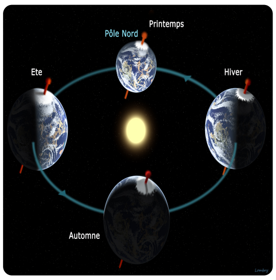
La première idée qu'il nous vient pour construire un cadran solaire est de planter un bâton dans le sol et de tracer à la surface des lignes correspondant aux différentes heures de la journée. Et effectivement, le lendemain, les ombres correspondent aux heures marquées la veille. Mais retrouverons-nous la même correspondance dans quelques mois, lorsque la hauteur du soleil dans le ciel ne sera plus la même, lorsque les saisons auront changé ? On comprend assez vite qu'il n'est pas si simple de construire un cadran solaire qui pourra être précis toute l'année.

Nous allons dans ce devoir maison nous intéresser aux cadrans solaires verticaux, ceux installés sur des murs par exemple, comme ci-contre.
La tige métalique plantée au centre du cadran s'appelle un **style** ou un **gnomon**.
À savoir également qu'un cadran solaire indique l'heure solaire et non pas l'heure de nos montres (c'est-à-dire l'heure moyenne).
Par exemple, le midi solaire, en un lieu donné sur Terre, est le moment de la journée où le soleil est au plus haut dans le ciel. En terme géométrique, cela correspond au moment où le soleil passe dans le plan méridien du lieu.

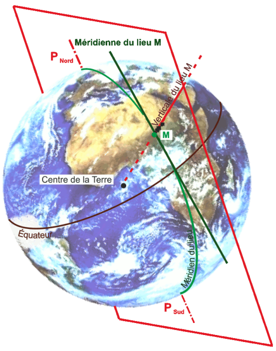


Remarque 1

- La Terre ne tourne pas à vitesse constante autour du Soleil et sa trajectoire est une ellipse (cf lois de Kepler).
- La Terre tourne sur elle-même autour d'un axe qui n'est pas perpendiculaire au plan de son orbite autour du Soleil (écliptique). Ainsi, en fonction de l'époque de l'année, parfois le pôle nord est plus proche du Soleil que le pôle sud, parfois c'est le contraire. Par exemple il est possible que le soleil se couche plus tôt à Bordeaux qu'à Paris, alors que Bordeaux est plus à l'ouest.



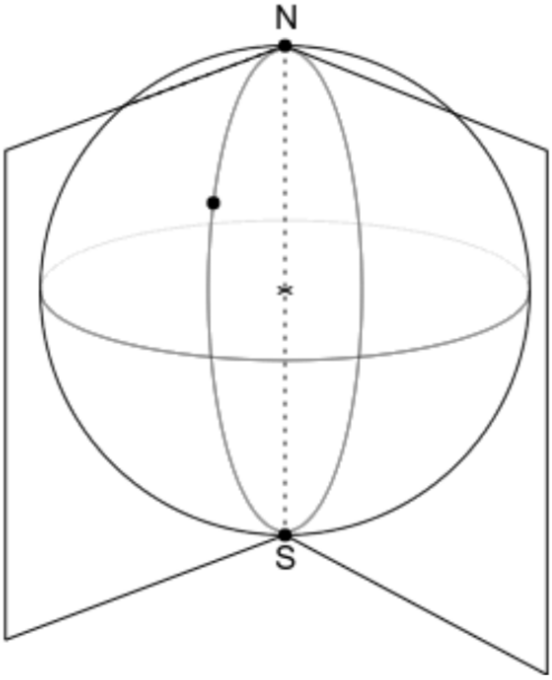
- Le plan méridien d'un lieu (d'un point sur la Terre) est le plan passant par ce lieu et les pôles.



Comment définir les heures autres que midi ?

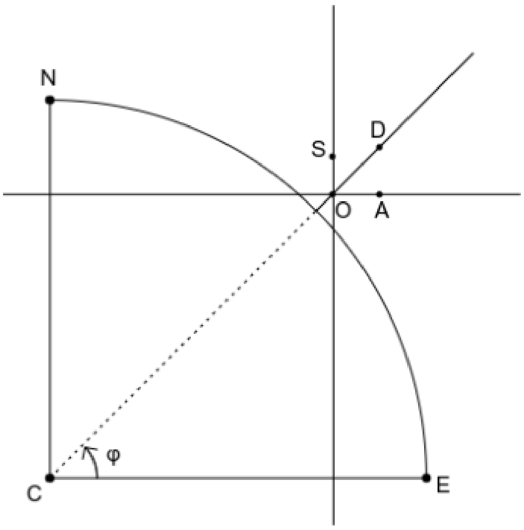
La Terre fait un tour sur elle-même en 24h. En une heure la terre tourne donc de $\dfrac{2\pi}{24} = \dfrac{\pi}{12}$ radians.

Ainsi, pour lorsqu'il est midi dans un lieu A il est 13 h dans un lieu B , situé plus à l'est, tel que les plans méridiens P_A et P_B de chacun de ces lieux forment un angle de $\dfrac{\pi}{12}$.
Toutes les autres heures par rapport au lieu du cadran solaire sont donc définies par des plans méridiens, tous sécants suivant la droite passant par les deux poles, et dont les angles par rapport au méridien du lieu sont des multiples de $\dfrac{\pi}{12}$.

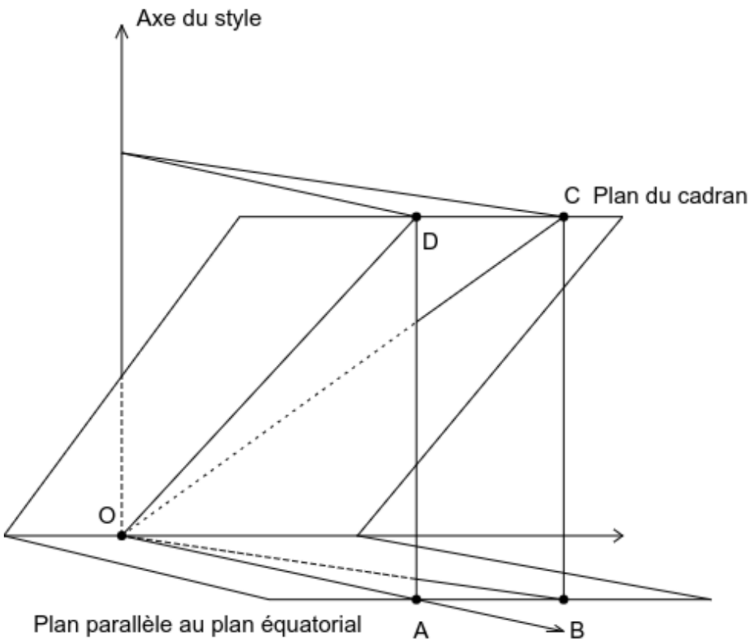


Partie A - Construire un cadran solaire verticale

1. Puisque le style doit-être parallèle à tous les plan méridiens, déterminer une droite à laquelle il doit être parallèle. La réponse sera justifiée à l'aide d'un théorème qui n'est pas dans le cours est qui s'appelle *le théorème du toit*.
2. Dans le schéma ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle pour des raisons évidentes de représentation des objets, on a placé le mur sur lequel le cadran vertical est construit.
    - Le style est fixé au point O, sa direction est la droite (OS),
    - le mur repose sur la droite (OD),
    - les points C, N et E, représentent respectivement le centre de la Terre, le pôle nord et la direction est. Ainsi la droite (CE) appartient au plan équatorial.
    - la droite (OA) est parallèle au plan équatorial et la droite (AD) est parallèle à l'axe de rotation de la Terre,
    - le style est parallèle à l'axe de rotation de la Terre,
    - la latitude du cadran solaire est notée φ.



    a. Quelle est la nature du triangle OAD ?
    b. Quelle est la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$?
    c. En notant $OA = b$ et $AD = c$, exprimer $\tan(\varphi)$ en fonction de b et c.
3. Pour pouvoir construire sur notre cadran les segments défissant les différentes heures solaires de la journée, on raisonne dans un premier temps dans la figure ci-dessous.



On reprend les notations de la figure précédente. Le plan OAD est le plan méridien de midi et le plan OBC est un autre plan méridien. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles à l'axe du style et les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

On note $AB = a$, $OA = b$, $AD = c$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}) = \beta$.

On se place dans le repère d'origine O, d'axe des abscisses (OA), d'axe des ordonnées la droite passant par O et parallèles à (AB) et d'axe des cotes l'axe du style.

On a par exemple, dans ce repère que le point A a pour coordonnées $(b\,;0\,;0)$.

a. Donner, en fonction de a, b et c, les coordonnées des points O, A, B, C et D dans ce repère.
b. Démontrer que les triangles OAB, OAD et ODC sont rectangles.
c. Exprimer $\tan(\beta)$ en fonction de b et c.
d. En déduire que $\tan(\beta) = \tan(\alpha)\cos(\varphi)$.
e. La latitude du lycée Gutenberg de Créteil est de $48,77^\circ$. En utilisant la calculatrice, et les questions précédentes (en prenant des multiples de $\dfrac{\pi}{12}$ pour α) compléter, en expliquant la démarche, le tableau ci-dessous :

Heure	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	12h	13h	14h	15h	16h	17h	18h	19h	20h	21h	22h
Angle β																		

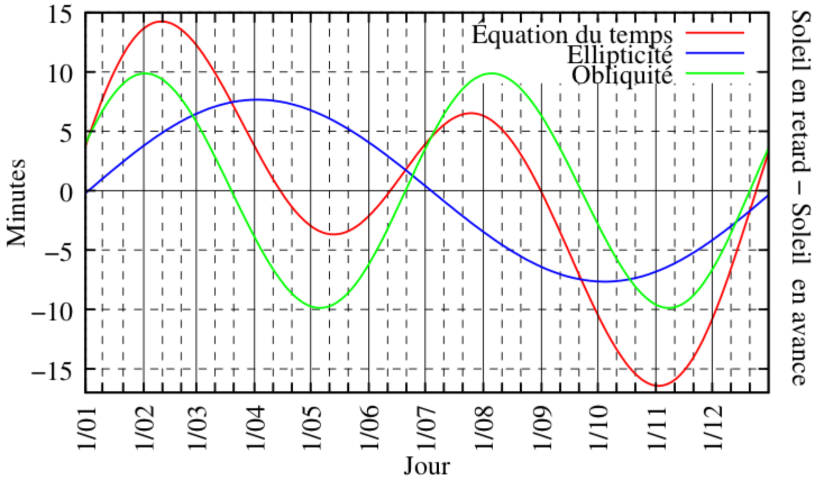
Remarque 2

Les valeurs des angles que l'on trouve nous permettent de tracer non pas différents segments $[OC]$ de la figure précédente, mais leur prolongement de l'autre côté de O. Le style est également orienté vers le « bas » par rapport à notre point de vu.

Partie B - De l'heure solaire à l'heure officielle

Lorsqu'il est midi sur une montre, est-il midi dans le ciel ? Généralement non. Déjà, il est possible que nous soyons en heure d'été, ou en heure d'hiver, il peut donc y avoir un décalage d'une heure. Il est possible aussi que la région du monde dans laquelle on se retrouve décide d'une heure officielle plus importante que celle d'un fuseau horaire. Le décalage en longitude peut donc imposer des décalages de plusieurs minutes. Mais il n'y a pas que ces différences là. On a déjà vu que la trajectoire elliptique de la Terre et son obliquité créent des décalages d'heure.

Ainsi, les midis solaires ne sont pas espacés de manière uniforme dans le temps, et le midi d'une montre, qui revient précisément toutes les 24 heures, n'est pas exactement le midi du soleil qui parfois retarde et d'autres fois avance. Les décalages sont constants d'une année sur l'autre et sont représentés dans le graphique ci-dessous par une courbe appelée depuis Newton **équation du temps**.



Il existe un enchaînement de formules « simplifiées » pour déterminer les valeurs de l'équation du temps :

- n : numéro du jour de l'année;
- $M = \dfrac{\pi}{180}(357,529\,1 + 0,985\,600\,28n)$;
- $C = 1,914\,8 \times \sin(M) + 0,02 \times \sin(2M) + 0,000\,3 \times \sin(3M)$;
- $L = \dfrac{\pi}{180}(280,466\,5 + C + 0,985\,647\,36n)$;
- $R = -2,468 \times \sin(2L) + 0,053 \times \sin(4L) - 0,001\,4 \times \sin(6L)$;
- équation du temps (en minutes) = $4(C + R)$.

1. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'après exécution il affiche l'équation du temps correspondant au jour numéro 146.

```python
import math

def equat(n):
    M = (357.5291 + 0.98560028*n)*math.pi/180
    C = 1.9148*math.sin(M)+0.02*math.sin(2*M)+0.0003*math.sin(3*M)
    L =
    R =
    return 4*(C+R)

print(equat(146))
```

2. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer le plus petit terme d'une suite (u_n) ainsi que son rang parmi ces 100 premiers. termes.

```
n = 0
u = u(0)
Pour i allant de 1 jusqu'à 99, faire :
    Si u(i) < u alors :
        u = u(i)
        n = i
    Fin de Si
Fin de Pour
Afficher u et n
```

   Écrire un algorithme Python permettant d'obtenir la plus grande et la plus petite valeur de l'équation du temps. Donner le jour de l'année correspondant (en supposant que l'année n'est pas bissextile).

3. Une personne regarde un cadran solaire le 7 juillet et y lis 9 h. Quelle heure lit-elle sur sa montre supposée bien réglée ?
4. Donner, en expliquant la démarche, l'heure solaire du moment de votre naissance.