Révisions d'algèbre

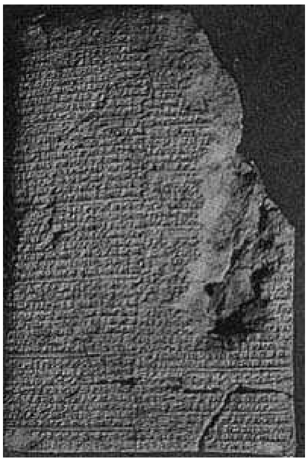

Table des matières

1 Priorité des opérations - Règle des signes - Fractions

1.1 Priorité des opérations et règles des signes

Dans un calcul où ne se trouve aucune parenthèse, on calcule en premier les puissances, puis les multiplications (ou divisions), puis les additions (ou soustractions).
Dans un calcul où se trouvent des parenthèses, on effectue en premier les calculs les plus entre parenthèss. Dans la parenthèse la plus intérieure il n'y a plus de parenthèses, les règles de calcul sont donc celles énoncées précédemment.
La règle des signes peut se résumer de la sorte :

- le produit de deux nombres positifs est positif.
- le produit de deux nombres négatifs est positif.
- le produit d'un nombre positif et d'un nombre négatif est négatif.

Exercice 1 Effectuer les calculs suivants.

$$\begin{aligned}
A &= 3 + 4 \times (5 - 3 \times (2 + 4 \times (-7))) \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= (4 \times (3 - 8) - 7 \times 3) \times 2 - (7 - 5 \times (3 - 4 \times 3 + 7)) \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= 6 + 3 \times (-7) + (6 + 3 \times (2 - 4 \times (3 - 5 \times 4 + 11 - 5 + 23 \times (2 \times 4 - 7 + 4 \times 6)))) \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

1.2 Fractions

1.2.1 Simplification des fractions

Règle de simplification d'une fraction.
Soient a et b deux entiers relatifs, b non nuls. On a la règle de simplification suivante :

$$\boxed{\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b} \text{ pour tout nombre } k \text{ non nul.}}$$

Remarque 1 Cette règle n'est valable que pour la multiplication. Ne surtout pas la faire avec une addition !!!

Exercice 2 Compléter les pointillés pour que les égalités soient vraies

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{\ldots} \qquad \frac{5}{2} = \frac{\ldots}{10} \qquad \frac{35}{\ldots} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{34}{13} = \frac{\ldots}{65} \qquad \frac{\ldots}{42} = \frac{49}{7} \qquad \frac{33}{\ldots} = \frac{132}{68}$$

1.2.2 Multiplication de fractions

Pour multiplier deux fractions entre elles, on effectue la règle suivante.

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}}$$

Exercice 3 Effectuer les calculs suivants, et donner le résultat sous forme de fractions irréductibles.

$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad \frac{-11}{3} \times \frac{5}{4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{7}{33} \times \frac{6}{4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad \frac{25}{-75} \times \frac{3}{12} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{-15}{49} \times \dfrac{14}{-3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad$ $\dfrac{9}{18} \times \dfrac{1005}{2010} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1.2.3 Addition de fractions

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions, le réflexe est de les mettre au même dénominateur.
Et pour mettre des fractions au même dénominateur on utilise la règle de simplification énoncée plus haut (mais on l'effectue à l'envers...). Une fois que les fractions sont écrites avec le même dénominateur, on peut alors les additionner entre elles.

$$\boxed{\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}}$$

Remarque 2 Un nombre entier quelconque n est égale à la fraction $\dfrac{n}{1}$.

Exercice 4 Effectuer les calculs suivants et écrire les résultats sous forme de fractions irréductibles.

$\dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad$ $\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{-5}{3} + \dfrac{7}{6} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad$ $\dfrac{5}{7} - \dfrac{4}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$5 - \dfrac{4}{11} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad$ $\dfrac{-6}{8} + \dfrac{3}{-12} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 5 On peut faire des calculs plus complexes avec des fractions : additions et multiplications mélangées. On écrira toujours les résultats sous forme de fractions irréductibles.

$A = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \times \frac{3}{2}$

$B = 3 - \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{4}{3}$

$C = -\frac{2}{7} + 3 \times \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right)$

$D = \frac{3}{4} \times \left(\frac{5}{7} - \frac{4}{8} \times \frac{2}{6}\right)$

2 Produit en croix - Proportionnalité

2.1 Produit en croix

Ce que nous appelons "produit en croix" est la relation suivante :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Downarrow$$

$$a \times d = c \times b$$

Car en fait on imagine que l'on trace une flèche de a vers d et une autre de b vers c, flèches qui se croisent en formant une croix.

Mais on peut aussi avoir d'autres transformations :

$$\frac{a}{b} = c$$ $$\Downarrow$$ $$a = c \times b$$	$$a \times b = \frac{c}{d}$$ $$\Downarrow$$ $$a = \frac{c}{d \times b}$$

On peut en fait imaginer tous les mouvements possibles suivant les flèches qui traversent le "=" en diagonale.

Exercice 6 Résoudre les équations suivantes (c'est à dire trouver la valeur de l'inconnue pour que l'égalité soit vraie).

$\frac{x}{2} = 3$ $\qquad$ $\frac{2x}{3} = 5$

$-\frac{7y}{11} = -\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{3}{t} = \frac{4}{9}$

2.2 Proportionnalité

Une situation de proportionnalité est une situation où on passe d'une quantité à une autre en multipliant toujours par le même nombre. Par exemple la conversion dollars/euros, ou litres/m^3, etc.

Exercice 7 Les tableaux suivants sont des tableaux de proportionnalités. Compléter les cases vides.

4	6		
12		33	7

	23	46	
5	11		7

3 Formules sur les puissances

Soient a, b deux nombres réels non nuls, n et m deux entiers naturels.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$
$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$
$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exercice 8 Ecrire sous la forme a^n où a est un nombre réel et n un entier relatif.

$5^2 \times 5^4$

$6^5 \times 6^{-8}$

$3^4 \times 5^4$

$2,5^{-7} \times 4,2^{-7}$

$-4 \times (-4)^{-5}$

$7^{-5} \times 7$

$(-2)^{-3} \times (-2)^5$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

Exercice 9 Même consigne

$\dfrac{3^8}{3^{-4}}$ $\dfrac{4^6}{4^2}$

$\dfrac{6^5}{3^5}$ $\dfrac{(-4,5)^4}{3^4}$

$\dfrac{9^{-3}}{(-2,5)^{-2}}$ $\dfrac{3,2^{-5}}{3,2^{-2}}$

Exercice 10 Ecrire sous la forme d'une seule puissance.

$A = 8^2 \times 8^{-3} \times 8^7$

$B = 11^{-8} \times \dfrac{11^7}{11^{-4}}$

$C = \dfrac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}}$

4 Développer- Factoriser - Identités remarquables

4.1 Développer

Pour développer une expression on se sert des règles suivantes :

$$\boxed{a \times (b + c) = a \times b + a \times c \qquad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

Exercice 11 Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

$A = 3 \times (4x + \dfrac{4}{7})$ $B = x(4 - 3x)$

$C = (2y - 1)(4y + 5)$

$D = 5x + (3 - 2x)(3x + 2) - 7x^2$ *Solution à trouver :* $D = -13x^2 + 10x + 6$

$E = (2t - 1)(3 - 2t)(t + 4)$ *Solution à trouver :* $E = -4t^3 - 10t^2 + 13t + 12$

4.2 Factoriser

Pour factoriser on cherche à appliquer la formule de développement mais écrite dans l'autre sens, c'est à dire :

$$\boxed{a \times b + a \times c = a \times (b + c)}$$

Observons cela sur un exemple.

Soit l'expression, $A = (2x + 1)(3 - x) - (2x + 1)(5x - 4)$.

On remarque en fait que dans : $A = (2x+1)(3 - x) - (2x+1)(5x - 4)$, le facteur $(2x + 1)$ est le facteur commun.

On obtient donc :

$A = (2x + 1)((3 - x) - (5x - 4))$.

$A = (2x + 1)(3 - x - 5x + 4)$

$A = (2x + 1)(-6x + 7)$

Exercice 12 Trouver le facteur commun puis factoriser les expressions suivantes.

$A = (x+3)(4x-3) + (x+3)(2x-2)$

$B = (2x-5)(x+2) - (2x-5)(4-3x)$

$C = (5-t)(3t+4) + (3t-2)(5-t) - (5-t)(4-3t)$

$D = (1-x)(2x-7) + (x-1)(4x+3)$

$E = (3x-4)(2x+7) - (4x+14)(x+9)$

4.3 Identités remarquables

Voici les identités remarquables écrites tout d'abord dans le sens du développement, puis dans le sens de la factorisation.

Pour développer	Pour factoriser
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Exercice 13 Développer les expressions suivantes.

$A = (x+1)^2$

$B = (2t-3)^2$

$C = (5y-6)(5y+6)$

$D = 2x^2 + (2x-5)^2 + (3x-7)(x+5)$

Exercice 14 Factoriser les expressions suivantes.

$A = x^2 - 1$ $\qquad$ $B = t^2 - 9$

$C = 4x^2 - 1$ $\qquad$ $D = 36 - 9y^2$

$E = 3x^2 - 1$ $\qquad$ $F = 7 - 2y^2$

5 Racines carrées

Étant donné un nombre positif a, la racine carrée de a est le nombre qui élevé au carré vaut a.
En d'autres termes :

$$\boxed{(\sqrt{a})^2 = a}$$

Nous avons les autres formules suivantes :

$$\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Remarque 3 Faire très attention : nous n'avons pas l'équivalent de la règle de multiplication pour l'addition, c'est à dire : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$! ! ! ! !

Exemple 1 Nous allons utiliser ces formules pour écrire de manière plus simple certaines racines carrées.

Tout d'abord simplifions : $\sqrt{98}$.

$$\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

À vous d'appliquer cela dans les exercices qui suivent.

Exercice 15 Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers relatifs, b positif (forcément) le plus petit possible.

$a = \sqrt{9}$ $\qquad$ $b = \sqrt{12}$ $\qquad$ $c = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$

$d = 2\sqrt{2} - \sqrt{18}$ $\qquad$ $e = \sqrt{45} + 3\sqrt{20} - 3\sqrt{5}$

Exercice 16 Écrire les nombres suivants sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec c le plus petit possible.

$a = (1 + \sqrt{2})^2$ $\qquad$ $b = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

$c = (2 + 3\sqrt{5})^2$ $\qquad$ $d = (\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})$

6 Équation du premier degré - Équation produit

6.1 Équation du premier degré

Résoudre une équation en l'inconnue x c'est chercher les valeurs de x qui font que l'égalité est vraie.
Par exemple 2 est une solution de l'équation $3x - 2 = 4$, car 3×2 est bien égale à 4.
Une équation du premier degré en y (par exemple) est une équation où n'apparait que des nombres et des inconnues y. Il n'y a pas de y^2, encore moins de y^3.

Les grandes étapes de la résolution d'une équation du premier degré sont :
- Développer et réduire.
- Mettre toutes les inconnues à gauche et tous les nombres à droite.
- Réduire.
- Utiliser une règle de produit en croix. (Pour passer par exemple de $2x = 3$ à $x = \dfrac{3}{2}$)

Exercice 17 Résoudre les équations du premier degré suivantes.

$2x + 3 = 5$

$2x - 7 = 3x + 1$

$4 - 2t = \dfrac{3}{5} - 7t$

$5 \times (2t - 3) = 4 \times (4 - 3t) + 5t$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{5-4x}{3}$$

6.2 Équation produit

Pour pouvoir résoudre une équation produit il faut se rappeler du fait que le produit entre deux nombre est nul si et seulement si, l'un des facteurs est nul.
En d'autres termes, $a \times b = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Par exemple si $x(x+1) = 0$ alors ou bien $x = 0$ ou bien $x + 1 = 0$.

Exercice 18 Résoudre les équations suivantes.

$$(x+3)(2x-7) = 0$$

$$(2t-1)(5-3t) = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}x + 3\right)(2-3x) = 0$$

$\frac{1467}{435}(3x+2)(x+5-6x)=0$

6.3 Inéquations du premier degré

Résoudre une inéquation en l'inconnue x c'est chercher les valeurs de x qui font que l'inégalité est vraie.
Par exemple 2 est une solution de l'inéquation $3x-2>-64$, car 3×2 est bien strictement inférieur à -64.

Les grandes étapes de la résolution d'une inéquation du premier degré sont :

1. Développer et réduire.
2. Mettre toutes les inconnues à gauche et tous les nombres à droite.
3. Réduire.
4. Utiliser une règle de produit en croix.

Mais ici il faut faire très attention lors de la dernière étape, celle de l'utilisation du porduit en croix, car nous devons suivres les règles suivantes.

Pour résoudre $ax>b$, $b\neq 0$:

Si $a>0$	Si $a<0$
$ax>b$ devient $\boxed{x>\frac{b}{a}}$	$ax>b$ devient $\boxed{x<\frac{b}{a}}$

Voici un exemple de résolution d'inéquation du premier degré.

On veut résoudre l'inéquation : $3x-4\leq 7x+3$.
On s'y prend donc ainsi :

$$\begin{array}{rcl} 3x-4 & \leq & 7x+3 \\ 3x & \leq & 7x+3+4 \\ 3x-7x & \leq & 7 \\ -4x & \leq & 7 \\ x & \geq & -\frac{7}{4} \end{array}$$

On observera le changement de sens du symbole d'inégalité. (ceci à cause du -4 qui était le coefficient de x)

Les solutions de cette inéquation sont donc tous les nombres x plus grand que $-\frac{7}{4}$, solutions que l'on peut écrire $S = [-\frac{7}{4}; +\infty[$.

Exercice 19 Résoudre les inéquations suivantes :

$3x > 4$

$-4x \geq 9$

$2x + 4 \leq 7x + 8$

$5 - 3x < 4x + 9$

$3\left(2 + \frac{5}{3}x\right) - 7 \leq 9x + 1$