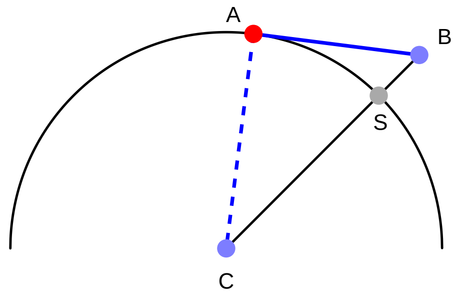
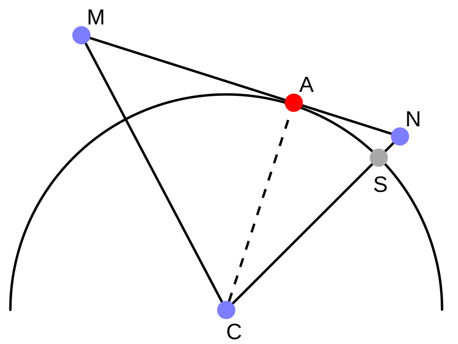
DM ∼ Mesurer des distances sur Terre

1 Les horizons

On considère dans cette partie que la terre est sphérique et que son rayon R vaut approximativement $6\,371$ km.
On se pose la question de la distance maximale à laquelle peut se porter le regard d'une personne, se situant à une hauteur h, à la surface de la Terre.
Dans le graphique ci-dessous les échelles ne sont pas respectées pour des raisons de lisibilité. Les yeux de la personne sont situés en B et son regard porte jusqu'en A. Le point C est le centre de la Terre et le point S est le point d'intersection entre le niveau 0 et la droite (CB).
On a $CS = CA = R$, $SB = h$, et la droite (BA) est tangente au cercle en A.

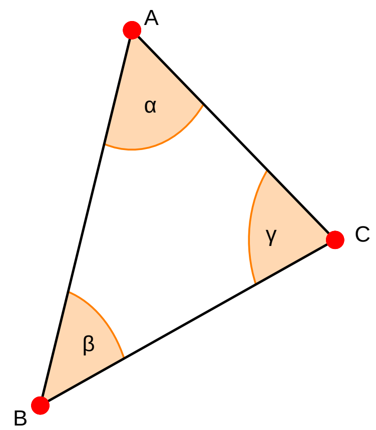


1. Montrer que pour réel $h \geq 0$, $AB = \sqrt{h^2 + 12\,742h}$.
2. Lorsqu'une personne se tient à 2 mètres au-dessus du niveau de la mer, à quelle distance porte son regard ? Même question pour une hauteur de 200 mètres.
3. On s'intéresse maintenant à l'angle $\alpha = \widehat{CBA}$.
   a. Montrer que $\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{h^2 + 12\,742h}}{6\,371 + h}$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{h \to +\infty} \cos(\alpha)$.
   c. En déduire la position limite du point A sur la Terre par rapport au point S.
4. Sur le schéma suivant est modélisé au point M le sommet du Monte-Padru, point culminant de la Corse, dont l'altitude est de $2\,390$ m. Le point N représente la hauteur des yeux d'un observateur dans la ville de Nice.
   On estime que la distance NM vaut 190 km et que la droite (NM) est tangente au cercle représentant la Terre en A.
   Quelle est la hauteur minimale où doit se situer l'observateur à Nice pour qu'il puisse voir le sommet du Monte-Padru ?



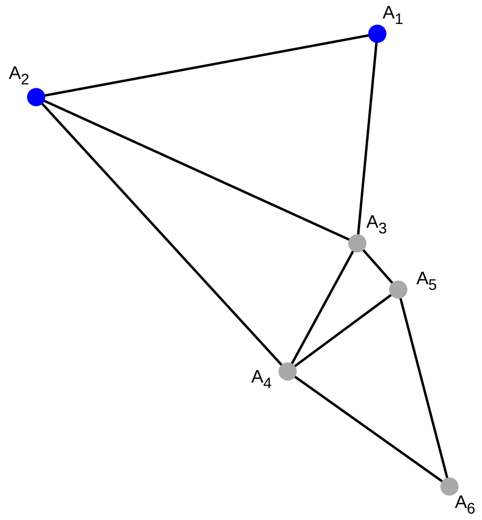
2 La triangulation

Dans la figure ci-contre, les angles α, β et γ du triangle ABC sont aigus. On note $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.



1. Construire la hauteur $[CH]$ et en appliquant les formules de trigonométrie, démontrer que : $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$.
   En déduire l'expression de b en fonction de a, α et β.
2. Dans la figure ci-dessous on a :
   - $A_1A_2 = 30$ km,
   - $\widehat{A_2A_1A_3} = 74°$, $\widehat{A_1A_2A_3} = 35°$,
   - $\widehat{A_3A_2A_4} = 23°$, $\widehat{A_2A_3A_4} = 86°$,
   - $\widehat{A_4A_3A_5} = 70°$, $\widehat{A_3A_4A_5} = 25°$,
   - $\widehat{A_4A_5A_6} = 68°$, $\widehat{A_5A_4A_6} = 72°$.

   Déterminer la longueur A_5A_6.



3. En utilisant les résultats de cette partie, expliquer l'utilité de la carte suivante établie en 1744.