Livret de révision

Baccalauréat – Spécialité Mathématiques

Sujets du baccalauréat 2025

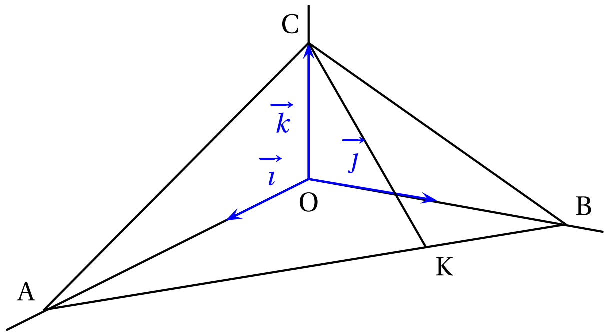
Géométrie dans l'espace

Exercice 1

Amérique du Sud – 14 novembre 2025 (Jour 2)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les points

$$\mathrm{A}\left(2\sqrt{3}\,;\,0\,;\,0\right),\quad \mathrm{B}(0\,;2\,;0),\quad \mathrm{C}(0\,;0\,;1)\quad \text{et}\quad \mathrm{K}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,0\right).$$



1. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (CK) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y & = & \dfrac{3}{2}t \\ z & = & -t+1 \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. Soit M(t) un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t.
   Établir que $\mathrm{OM}(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$.
3. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{OM}(t)$.
   a. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire la valeur de t pour laquelle f atteint son minimum.
4. En déduire que le point $\mathrm{H}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8}\,;\,\dfrac{3}{8}\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK).
5. Démontrer, à l'aide de l'outil produit scalaire, que le point H est l'orthocentre (intersection des hauteurs d'un triangle) du triangle ABC.
6. **a.** Démontrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation du plan (ABC).
7. Calculer, en unité d'aire, l'aire du triangle ABC.

Exercice 2

Centres étrangers – 13 juin 2025 (Jour 2)

Plan et orthogonalité

On se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ de l'espace.
On considère les points A$(1\,;0\,;3)$, B$(-2\,;\,1\,;\,2)$ et C$(0\,;3\,;2)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).
   c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne
   $-x + y + 4z - 11 = 0$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-3y+2z-9=0$ et le plan $\mathscr{P}'$ d'équation cartésienne $x-y-z+2=0$.

2. **a.** Démontrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.

b. Déterminer si les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.

3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

4. Montrer que le point M$(2\,;\,1\,;\,3)$ appartient aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. En déduire une représentation paramétrique de la droite (d).

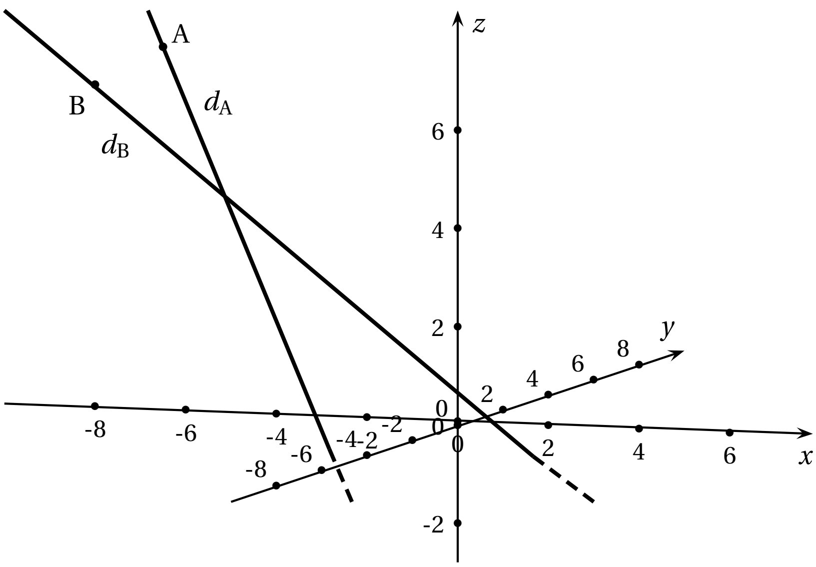
5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC).
Que peut-on dire des trois plans (ABC), $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$?

Exercice 3

Polynésie – 17 juin 2025 (Jour 1)

Trajectoires d'avions

Deux avions sont en approche d'un aéroport.
On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$ dont l'origine O est le pied de la tour de contrôle, et le sol est le plan P_0 d'équation $z=0$.
L'unité des axes correspond à 1 km.
On modélise les avions par des points.



L'avion Alpha transmet à la tour sa position en A$(-7\,;\,1\,;\,7)$ et sa trajectoire est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

L'avion Bêta transmet une trajectoire définie par la droite d_{B} passant par le point B dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -11+5t\\ y &=& -5+\ \ t \\ z &=& 11-4t\end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}$$

1. S'il ne dévie pas de sa trajectoire, déterminer les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol.

2. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_A caractérisant la trajectoire de l'avion Alpha.
   b. Les deux avions peuvent-ils entrer en collision ?
3. **a.** Démontrer que l'avion Alpha passe par la position E$(-3\,;\,-1\,;\,1)$.
   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan P_E passant par E et perpendiculaire à la droite d_A est :

$$2x - y - 3z + 8 = 0.$$

   c. Vérifier que le point F$(-1\,;\,-3\,;\,3)$ est le point d'intersection du plan P_E et de la droite d_B.
   d. Calculer la valeur exacte de la distance EF, puis vérifier que cela correspond à une distance de 3 464 m, à 1 m près.
4. La réglementation aérienne stipule que deux avions en approche doivent être à tout instant à au moins 3 milles nautiques l'un de l'autre (1 mille nautique vaut 1 852 m).
   Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, leur distance de sécurité est-elle respectée ?

Exercice 4

Métropole – 18 juin 2025 (Jour 2)

Droites sécantes

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$. On considère :

- les points A$(-1\,;\,2\,;\,1)$, B$(1\,;\,-1\,;\,2)$ et C$(1\,;1\,;1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{3}{2}+2t \\ y &=& 2+t \\ z &=& 3-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& s \\ y &=& \frac{3}{2}+s \\ z &=& 3-2s \end{array}\right. \quad \text{avec } s \in \mathbb{R};$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point S$\left(-\frac{1}{2}\,;\,1\,;\,4\right)$.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x + 2y + 4z - 7 = 0.$$

3. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
4. **a.** Démontrer que le point H$(-1\,;\,0\,;\,2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).
   b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que S$M < \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment [CS]. On a donc $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0;1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k.
2. Existe-t-il un point M sur le segment [CS] tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M ?

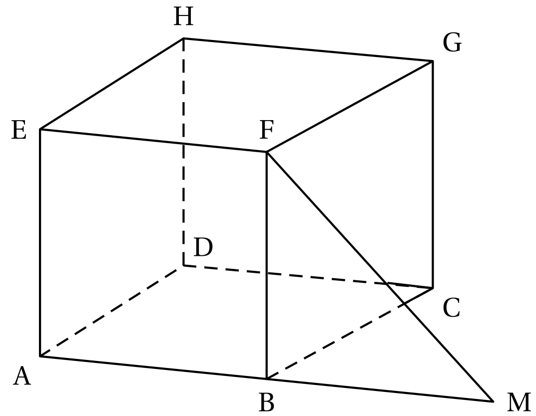
Exercice 5

Métropole/Amérique du Nord – 9 septembre 2025 (Jour 1)

Cube et perpendicularité

On considère le cube ABCDEFGH.

On place le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$.



Partie A

1. Montrer que les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires.
2. Montrer que les points A, M, G et H sont coplanaires.

Partie B

On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ et montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.
2. **a.** Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (GM) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1-t \\ z &=& 1-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

   b. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (AH) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0 \\ y &=& k \\ z &=& k \end{array}\right. \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que le point d'intersection de (GM) et (AH), que l'on nommera N, a pour coordonnées $(0;2;2)$.

3. **a.** Montrer que le triangle AMN est un triangle rectangle en A.

   b. Calculer l'aire de ce triangle.

4. Soit J le centre de la face BCGF.

   a. Déterminer les coordonnées du point J.

   b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{FJ}$ est un vecteur normal au plan (AMN).

   c. Montrer que J appartient au plan (AMN). En déduire qu'il est le projeté orthogonal du point F sur le plan (AMN).

5. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre ou d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h,$$

$\mathcal{B}$ étant l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
Montrer que le volume du tétraèdre AMNF est le double du volume de la pyramide BCGFM.

@

Exercice 6

Métropole – 10 septembre 2025 (Jour 2)

Plans médiateurs et tétraèdre

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points

$$\text{A}(4 ; -1 ; 3), \quad \text{B}(-1 ; 1 ; -2), \quad \text{C}(0 ; 4 ; 5) \text{ et } \text{D}(-3 ; -4 ; 6).$$

1. **a.** Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.
On admet qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $29x + 30y - 17z = 35$.

b. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? Justifier.

On admet que lorsque quatre points ne sont pas coplanaires, il existe un unique point situé à égale distance de ces quatre points.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le point H se situant à égale distance des quatre points A, B, C, D.
On définit le plan médiateur d'un segment comme le plan passant par le milieu de ce segment et orthogonal à la droite portant ce segment. C'est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

2. Soit P_1 le plan médiateur du segment [AB].

a. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

b. En déduire qu'une équation cartésienne de P_1 est : $5x - 2y + 5z = 10$.

3. On note P_2 le plan médiateur du segment [CD].

a. Soit M un point du plan P_2 de coordonnées $(x ; y ; z)$.
Exprimer MC^2 et MD^2 en fonction des coordonnées de M.
En déduire qu'une équation cartésienne du plan P_2 est : $-3x - 8y + z = 10$.

b. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2 - 1{,}9t \\ y & = & t \\ z & = & 4 + 2{,}3t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Démontrer que Δ est la droite d'intersection de P_1 et P_2.

On note P_3 le plan médiateur du segment [AC].
On admet qu'une équation cartésienne du plan P_3 est : $8x - 10y - 4z = -15$.

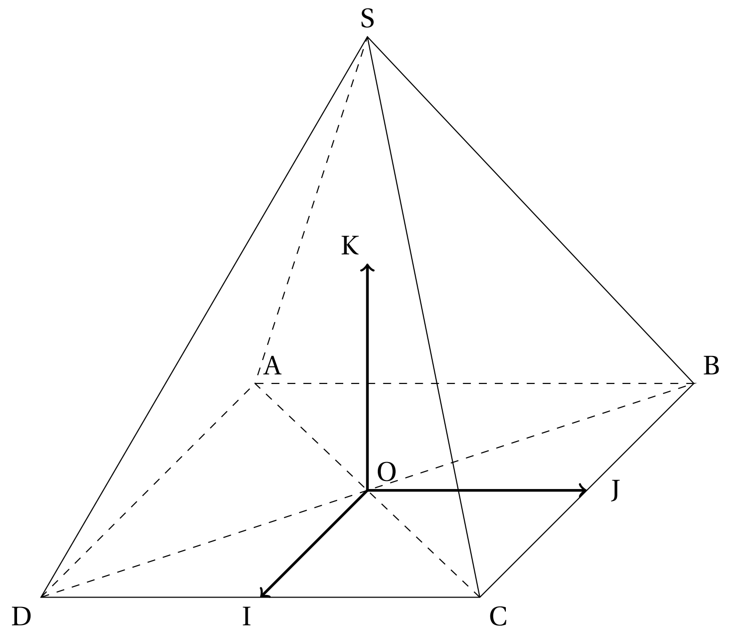
5. Démontrer que la droite Δ et le plan P_3 sont sécants.

6. Justifier que le point d'intersection entre Δ et P_3 est le point H.

Exercice 7

Amérique du Nord – sujet 1, 20 mai 2026

Dans cet exercice l'unité est le centimètre.
On considère une pyramide à base carrée SABCD comme dans la figure ci-dessous.



Dans cette figure :

— AB = BC = CD = DA = OS = 2 cm ;

— I est le milieu de [CD], J le milieu de [BC] et K le milieu de [OS].

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$.
On admet que B(-1 ; 1 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), et S(0 ; 0 ; 2).

Les **parties A** et **B** sont indépendantes.

0.1

1. Donner les coordonnées des points A et D.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB}$.
3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BSC}$ arrondie au dixième de degré près.

0.2

On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point O au plan (SBC).

1. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.
   - **a.** Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (SBC).
   - **b.** En déduire qu'une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y + z - 2 = 0$.
2. On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC).
   - **a.** a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (OH) est :
   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$
   - **b.** Calculer les coordonnées du point H.
   - **c.** En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

0.3

On se propose ici de retrouver le résultat de la **partie B** par une autre méthode.

1. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{ aire de la base} \times \text{hauteur}$$

   a. Calculer le volume de la pyramide SABCD.

   b. En déduire que le volume de la pyramide OCBS est égal à $\frac{2}{3}$ cm^3.

2. Déterminer l'aire du triangle SBC.

3. Déduire des questions précédentes que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.