Livret de révision

Baccalauréat – Spécialité Mathématiques

Sujets du baccalauréat 2025

Fonctions

Exercice 1

Amérique du Nord – 21 mai 2025 (Jour 1)

Dérivée et lecture graphique

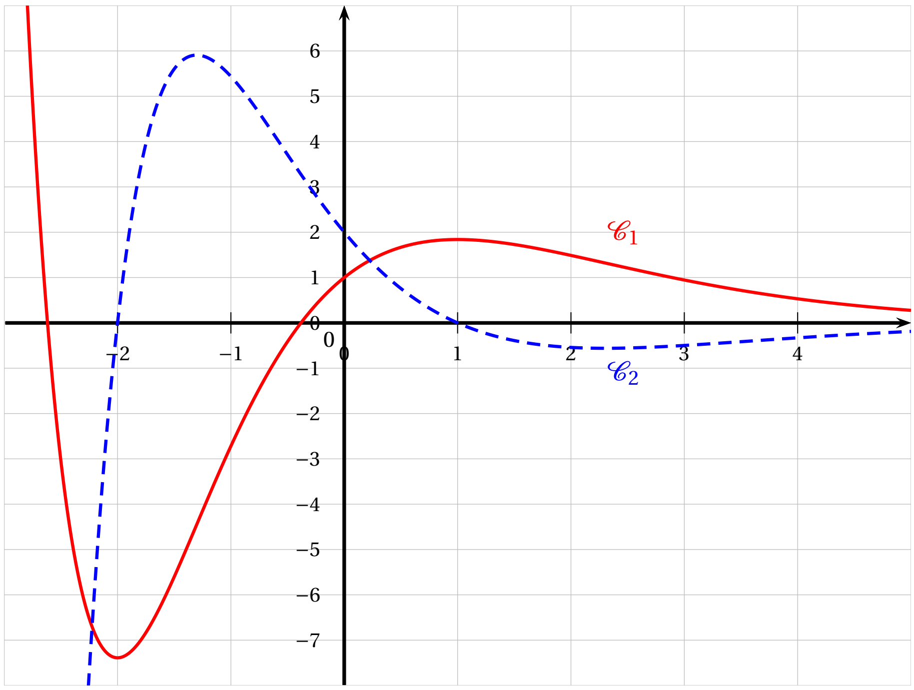
La **partie C** est indépendante des parties **A** et **B**.

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g'.
On précise également que :

— La courbe $\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

— La courbe $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2\,;\,0)$ et $(1\,;\,0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.

2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle

$$y + y' = (2x+3)\,\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = \left(x^2+3x\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y + y' = 0$.

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E).
Déterminer alors l'expression de la fonction g.

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right) \mathrm{e}^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
   On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
   a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2 - x + 1\right) \mathrm{e}^{-x}$.
   b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
4. On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
   On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = \left(-x^2 - 5x - 7\right) \mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.
   Soit α un nombre réel positif.
   Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

Exercice 2

Amérique du Nord – 22 mai 2025 (Jour 2)

Exponentielle et intégrale

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \sin(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x}[\sin(x) + \cos(x)].$$

   b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$
2. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^{x}\sin(x) \geqslant x$.
3. Justifier que le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

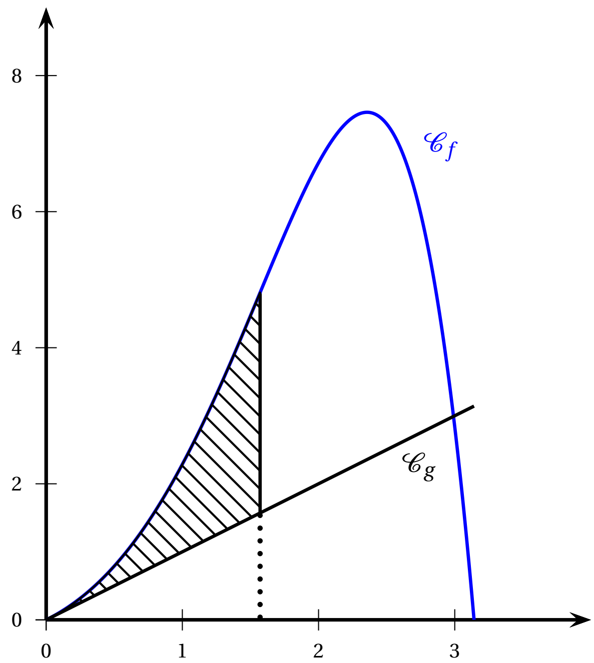
On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x}\sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{x}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.
3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.
   Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
   Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.



Exercice 3

Amérique du Nord (secours) – 22 mai 2025 (Jour 2)

Étude de fonction exponentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$$

4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement de α, au centième près.
8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n.
2. **a.** Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n.
   b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 ⋆⋆

Asie – 12 juin 2025 (Jour 2)

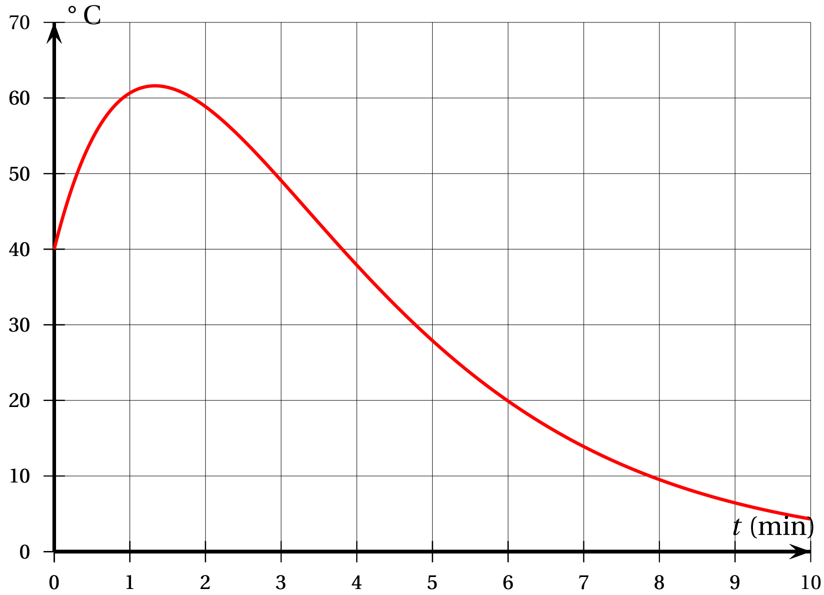
Température d'une réaction

Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé, sous certaines conditions. Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.
L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.
La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.
Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps $[0\,;\,10]$.
Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un repère orthogonal du plan, on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction température en fonction du temps sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

1. Déterminer, par lecture graphique, au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale à l'instant $t = 0$.



On appelle f la fonction température représentée par la courbe ci-dessus.
On précise que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t) = (at + b)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

2. On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b.
3. On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0,5y = 60\,\mathrm{e}^{-0,5t}$. Déterminer la valeur de a.

Partie B : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(t) = (60t + 40)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;10]$, on a : $f'(t) = (40 - 30t)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$.
2. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,0]$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.
   b. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.
   c. Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2, exprimés en minute, par

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 320 - \frac{800}{\mathrm{e}^2}$$

   b. En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.moyenne

---

Exercice 5 ★★ *Centres étrangers – 12 juin 2025 (Jour 1)*

Équation différentielle (bactéries)

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad y' + 0{,}48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{120}$.
   Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).
2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}48y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.
À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t, exprimé en heure.
On a donc $p(0) = 30$.
On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a $p(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2), alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $\quad y' + 0{,}48y = \dfrac{1}{250}$.
2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1), alors $p = \dfrac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2).
   Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :
   $$p(t) = \frac{120}{1 + K\,\mathrm{e}^{-0{,}48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$
3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K.
4. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.
   On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

Exercice 6 ⋆ ⋆ ⋆

Métropole – 18 juin 2025 (Jour 2)

Distance de freinage

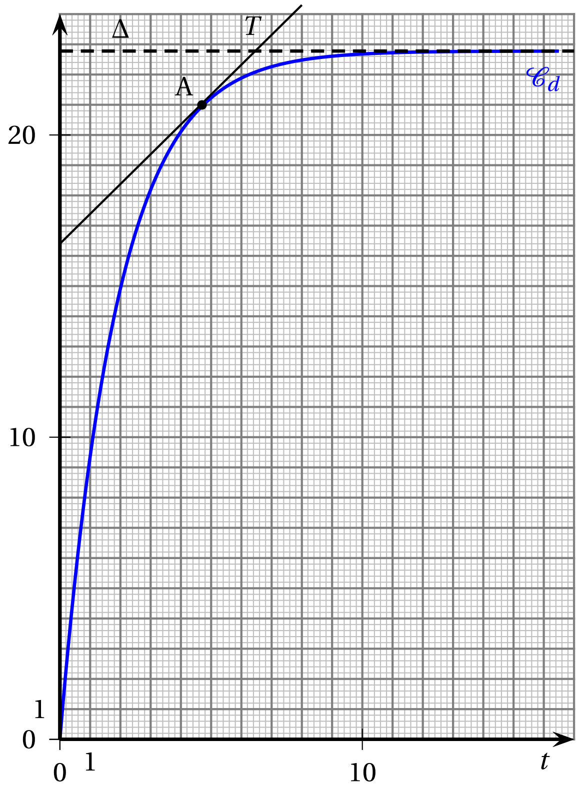
L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.
On note t le temps écoulé, exprimé en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.
On modélise la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage, exprimée en mètre, en fonction de t, à l'aide d'une fonction notée d définie sur $[0\,;\,+\infty[$.

On a ainsi $d(0) = 0$.
Par ailleurs, on admet que cette fonction d est dérivable sur son ensemble de définition. On note d' sa fonction dérivée.

Partie A

Sur la figure (Fig. 2) ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_d$ de la fonction d ;
- la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_d$ au point A d'abscisse 4,7 ;
- l'asymptote Δ à $\mathscr{C}_d$ en $+\infty$.



$Fig.2$

Dans cette partie, aucune justification n'est attendue.

Avec la précision que permet le graphique, répondre aux questions ci-dessous.
D'après ce modèle :

1. Au bout de combien de temps le chariot aura-t-il parcouru 15 m dans la zone de freinage ?
2. Quelle longueur minimale doit-être prévue pour la zone de freinage ?
3. Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.
On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde $\left(\text{m.s}^{-1}\right)$, en fonction de t, par une fonction v définie sur $[0\,;\,+\infty[$.
On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée ;

- la fonction v est une solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + 0{,}6y = \mathrm{e}^{-0{,}6t},$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.
On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1}, c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1. **a.** On considère l'équation différentielle

$$(E'): \quad y' + 0{,}6y = 0.$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = t\,\mathrm{e}^{-0{,}6t}$.
Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).

c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0\,;\,+\infty[$.

d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$v(t) = (12 + t)\,\mathrm{e}^{-0{,}6t}.$$

2. Dans cette question, on étudie la fonction v sur $[0\,;\,+\infty[$.

a. Montrer que pour tout réel $t \in [0\,;\,+\infty[$, $v'(t) = (-6{,}2 - 0{,}6t)\,\mathrm{e}^{-0{,}6t}$.

b. En admettant que :

$$v(t) = 12\,\mathrm{e}^{-0{,}6t} + \frac{1}{0{,}6} \times \frac{0{,}6t}{\mathrm{e}^{0{,}6t}},$$

déterminer la limite de v en $+\infty$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction v et dresser son tableau de variation complet. Justifier.

d. Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une solution unique α, dont on donnera une valeur approchée au dixième.

3. Lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde, un système mécanique se déclenche permettant son arrêt complet.
Déterminer au bout de combien de temps ce système entre en action. Justifier.

Partie C

On rappelle que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$v(t) = (12 + t)\,\mathrm{e}^{-0{,}6t}.$$

On admet que pour tout réel t dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$d(t) = \int_0^t v(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la distance parcourue par le chariot entre les instants 0 et t est donnée par :

$$d(t) = \mathrm{e}^{-0{,}6t}\left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9}\right) + \frac{205}{9}.$$

2. On rappelle que le dispositif d'arrêt se déclenche lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde.
   Déterminer, selon ce modèle, une valeur approchée au centième de la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage avant le déclenchement de ce dispositif.

Exercice 7 ⋆⋆

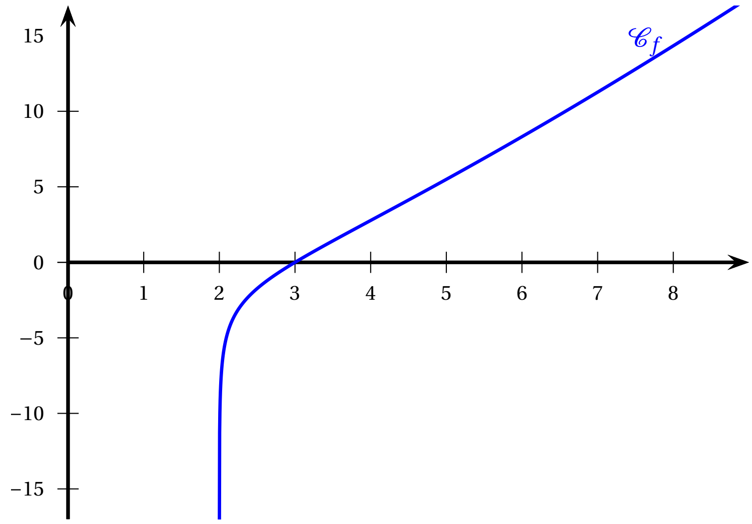
Polynésie – 18 juin 2025 (Jour 2)

Logarithme et variations

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x-2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.
   Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1.?
4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$:
$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$
5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.
   a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, on a :
$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$
   b. On admet que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = +\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
   En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2\,;\,+\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g.
   c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.
   d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$.

6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2\ ;\ +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.
7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?

Exercice 8 ⋆⋆

Métropole – 10 septembre 2025 (Jour 2)

Logarithme et aire

On considère la fonction f définie sur $]0\,;8]$ par

$$f(x) = \frac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}$$

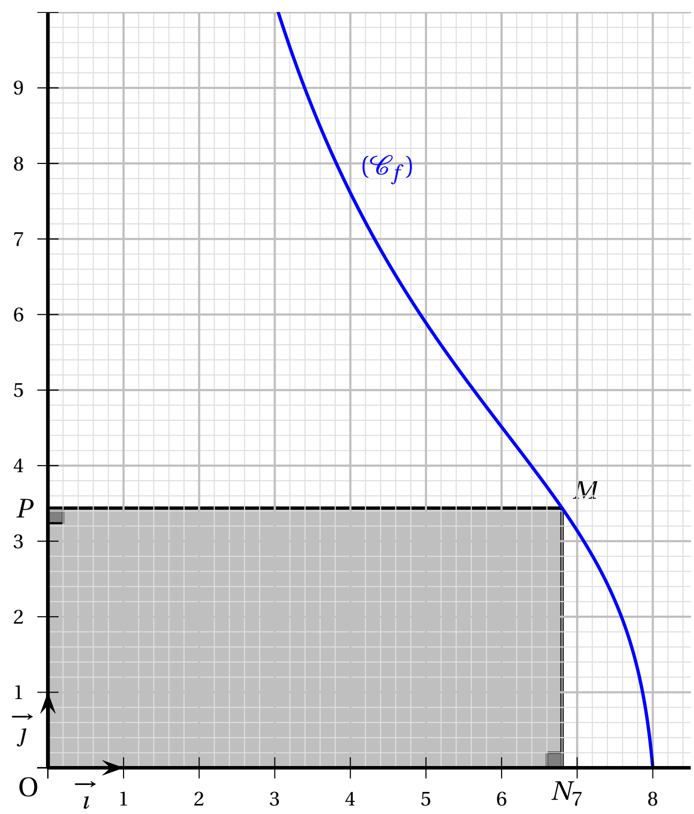
Soit C_f la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-x^2+7x+8 \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tout $x \in]0\ ;\ 8]$, on a $f(x) \geqslant 0$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

Partie B

La courbe C_f est représentée ci-dessous.
Soit M le point de C_f d'abscisse x avec $x \in]0\ ;\ 8]$.
On appelle N et P les projetés orthogonaux du point M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
Dans cette partie, on s'intéresse à l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle ONMP.



1. Donner les coordonnées des points N et P en fonction de x.

2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;8]$,

$$\mathscr{A}(x) = 10\ln\left(-x^2+7x+9\right)$$

3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale ? Si elle existe, déterminer cette position.

Partie C

On considère un réel strictement positif k.
On souhaite déterminer la plus petite valeur de x, approchée au dixième, appartenant à $[3{,}5\,;8]$ pour laquelle l'aire $\mathscr{A}(x)$ devient inférieure ou égale à k.
Pour ce faire, on considère l'algorithme ci-dessous.
Pour rappel, en langage Python, $\ln(x)$ s'écrit log (x).

Algorithme Python 1

```
1   from math import *
2
3   def A(x) :
4     return 10*log (- 1* x**2 + 7*x + 9)
5
6   def pluspetitevaleur(k) :
7     x = 3.5
8     while A(x).......... :
9       x = x + 0.1
10    return ...........
```

1. Recopier et compléter les lignes 8 et 10 de l'algorithme.

2. Quel nombre renvoie alors l'instruction `pluspetitevaleur(30)` ?

3. Que se passe-t-il lorsque $k = 35$? Justifier.