

Livret de révision

Baccalauréat – Spécialité Mathématiques

Sujets du baccalauréat 2025

❧ **Exercices mélangés** ❧

Exercice 1 ★ ★ ★

Métropole – 17 juin 2025 (Jour 1)

Posidonie : suite et équa. diff.

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n , on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année 2024 + n . Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

- Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
- On note h la fonction définie sur $[0; 20]$ par

$$h(x) = -0,02x^2 + 1,3x.$$

On admet que h est croissante sur $[0; 20]$.

- Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
 - En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
 - Justifier que $L = 15$.
- Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.
 - Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
 - Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

Algorithme Python 1

```
def seuil():
    n=0
    u= 1
    while ..... :
        n=.....
        u=.....
    return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t , en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$;
- f est dérivable sur $[0; +\infty[$;
- f est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1) : y' = 0,02y(15 - y).$$

On admet qu’une telle fonction f existe; le but de cette partie est d’en déterminer une expression.
On note f' la fonction dérivée de f .

- Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.
Montrer que g est solution de l’équation différentielle

$$(E_2) : y' = -0,3y + 0,02.$$

- Donner les solutions de l’équation différentielle (E_2) .
- En déduire que pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1}.$$

- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Résoudre dans l’intervalle $[0; +\infty[$ l’inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l’exercice.

Exercice 2 ★★

Polynésie – 18 juin 2025 (Jour 2)

Transmission binaire (probas + suite)

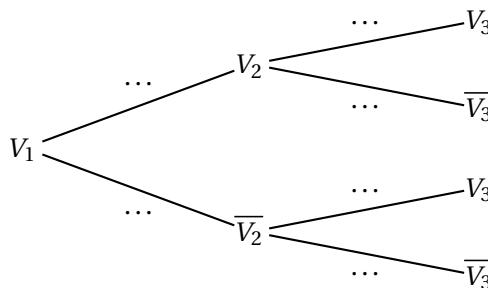
Dans tout l’exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près.
Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.
Une donnée de ce type est transmise successivement d’une machine à une autre.
Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c’est-à-dire en transmettant l’information telle qu’elle l’a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 devient 1).
La transmission est fidèle dans 90 % des cas, et donc contraire dans 10 % des cas.
Dans tout l’exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

- V_n l’évènement : la n -ième machine détient la valeur 1 fg;
- \overline{V}_n l’évènement : la n -ième machine détient la valeur 0 fg.

- Recopier et compléter l’arbre de probabilité ci-dessous.



- Démontrer que $P(V_3) = 0,82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l’exercice.
 - Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.
- Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $p_n = P(V_n)$.
La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1.$$

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5.$$

c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction `simulation` qui prend en paramètre un entier naturel n qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.

On donne ci-dessous le script incomplet de cette fonction.

On rappelle que l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0; 1[$.

Algorithme Python 2

```

1  def simulation(n):
2      donnee = 1
3      liste = [donnee]
4      for k in range(n):
5          if rand() < 0.1
6              donnee = 1 - donnee
7          liste.append(donnee)
9      return liste

```

Par exemple, `simulation(3)` peut renvoyer `[1, 0, 0, 1]`. Cette liste traduit :

- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machines;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième;
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième.

1. Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.

2. Calculer la probabilité que `simulation(4)` renvoie la liste `[1, 1, 1, 1, 1]` et la probabilité que `simulation(6)` renvoie la liste `[1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]`.

Exercice 3 ★ ★ ★

Métropole/Amérique du Nord – 9 septembre 2025 (Jour 1)

Convergence de deux suites

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.
 b. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. On appelle ℓ la limite de (u_n) .
 On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la valeur de ℓ .
4. On considère la fonction rang écrite ci-dessous en langage Python.
 On rappelle que $\text{sqrt}(x)$ renvoie la racine carrée du nombre x .

Algorithme Python 3

```

1 from math import *
2
3 def rang(a) :
4     u = 6
5     n=0
6     while u >= a :
7         u = sqrt(3*u - 2)
8         n = n+1
9     return n

```

- a. Pourquoi peut-on affirmer que $\text{rang}(2.000001)$ renvoie une valeur?
 b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction $\text{rang}(a)$ renvoie-t-elle un résultat?

Partie B

On admet que la suite (v_n) vérifiant $v_0 = 6$ et, pour tout n , entier naturel, $v_{n+1} = 3 - \frac{2}{v_n}$ est bien définie.

1. Calculer v_1 .
 2. Pour tout n entier naturel, on admet que $v_n \neq 2$ et on pose :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

- a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme w_0 .
 b. On admet que, pour tout n entier naturel,

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}.$$

En déduire que, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$$

- c. Calculer la limite de (v_n) .

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2,01$ en résolvant l'inéquation.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geq N$, les termes v_n et u_n appartiennent à l'intervalle $]1,99; 2,01[$.

Exercice 4 ★ ★ ★

Amérique du Sud – 14 novembre 2025 (Jour 2)

Dénombrement, équa. diff. et fonction

Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30; -29; -28; \dots -1; 1; \dots; 28; 29; 30\}$. Il comporte 60 éléments.

On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c .

1. Combien de couples $(a; c)$ différents peut-on ainsi obtenir?

On considère l'évènement M : « l'équation $ax^2 + 2x + c = 0$ possède deux solutions réelles distinctes », où a et c sont les entiers relatifs précédemment choisis.

2. Montrer que l'évènement M a lieu si et seulement si $ac < 1$.
 3. Expliquer pourquoi l'évènement contraire \overline{M} comporte 1 740 issues.
 4. Quelle est la probabilité de l'évènement M ? On arrondira le résultat à 10^{-2} .

Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): y' + 10y = (30x^2 + 22x - 8) e^{-5x+1} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

où y est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle : $y' + 10y = 0$.
 2. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}.$$

On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' la fonction dérivée de la fonction f .

Justifier que f est une solution particulière de (E) .

3. Donner l'expression de toutes les solutions de (E) .

Partie C : étude de fonction

On propose d'étudier dans cette partie la fonction f rencontrée à la partie B question 2.

On rappelle que, pour tout réel x , $f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f . On appelle \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$
 2. En utilisant la partie A, montrer que \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en deux points (les coordonnées de ces points ne sont pas attendues).
 3. En utilisant les parties A et B, montrer que \mathcal{C}_f possède deux tangentes horizontales.
 4. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f .

5. Déterminer en justifiant le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 1$.
6. Pour tout réel m strictement supérieur à 0,2, on définit I_m par $I_m = \int_{0,2}^m f(x) dx$.
- a. Vérifier que la fonction F définie sur \mathbb{R} par

$$F(x) = \left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125} \right) e^{-5x+1}$$

- est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .
- b. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle $I_m = 0$?
Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 5 ★★

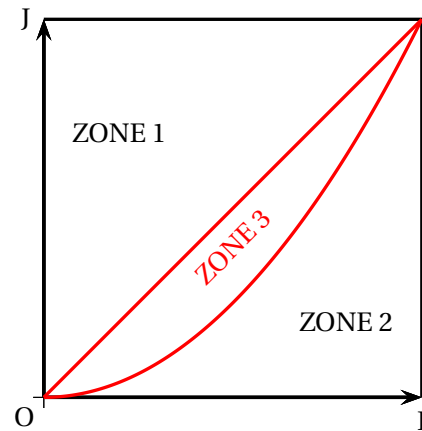
Nouvelle-Calédonie – 21 novembre 2025 (Jour 2)

Aires, zones et probabilités

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$ ci-contre, on a représenté :

- la droite d'équation $y = x$;
- la droite d'équation $y = 1$;
- la droite d'équation $x = 1$;
- la parabole d'équation $y = x^2$.

On peut ainsi partager le carré OIKJ en trois zones.



Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

Partie A

Démontrer les résultats figurant dans le tableau ci-dessous.

ZONE	ZONE 1	ZONE 2	ZONE 3
AIRE	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Partie B : un premier jeu

Un joueur lance une fléchette sur le carré ci-dessus. On admet que la probabilité qu'elle tombe sur une zone est égale à l'aire de cette zone. Ainsi, la probabilité que la fléchette tombe sur la ZONE 3 est égale à $\frac{1}{6}$.

- Si la fléchette tombe sur la ZONE 3, alors le joueur lance une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur PILE, alors le joueur gagne, sinon il perd.
- Si la fléchette tombe sur une autre zone que la ZONE 3, alors le joueur lance un dé équilibré à six faces. Si le dé tombe sur la FACE 6, alors le joueur gagne, sinon il perd.

On note les évènements suivants :

- T : « la fléchette tombe sur la ZONE 3 » ;
 G : « le joueur gagne ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{2}{9}$.
3. On sait que le joueur a gagné. Quelle est la probabilité que la fléchette soit tombée sur la ZONE 3?

Partie C : un second jeu

Un joueur, appelé joueur $n^{\circ} 1$, lance une fléchette sur le carré précédent. Comme dans la partie B, on admet que la probabilité que la fléchette tombe sur chacune des zones est égale à l'aire de cette zone. Le joueur gagne une somme égale, en euros, au numéro de la zone. Par exemple, si la fléchette tombe sur la ZONE 3, le joueur gagne 3 euros.

On note X_1 la variable aléatoire donnant le gain du joueur $n^{\circ} 1$. On note respectivement $E(X_1)$ et $V(X_1)$ l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_1 .

1.
 - a. Calculer $E(X_1)$.
 - b. Montrer que $V(X_1) = \frac{5}{9}$.
 2. Un joueur $n^{\circ} 2$ et un joueur $n^{\circ} 3$ jouent à leur tour, dans les mêmes conditions que le joueur $n^{\circ} 1$. On admet que les parties de ces trois joueurs sont indépendantes les unes des autres. On note X_2 et X_3 les variables aléatoires donnant les gains des joueurs $n^{\circ} 2$ et $n^{\circ} 3$. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = X_1 + X_2 + X_3$.
 - a. Déterminer la probabilité que l'on ait $Y = 9$.
 - b. Calculer $E(Y)$.
 - c. Justifier que $V(Y) = \frac{5}{3}$.
-