Livret de révision

Baccalauréat – Spécialité Mathématiques

Sujets du baccalauréat 2025

Probabilités

Exercice 1 ⋆⋆

Asie – 11 juin 2025 (Jour 1)

Jouets et contrôle qualité

Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation. Dans cet exercice, on s'intéresse à deux tests effectués par l'entreprise de jouets : un test *de fabrication* et un test *de sécurité*.

À la suite d'un grand nombre de vérifications, l'entreprise affirme que :

- 95 % des jouets réussissent le test de fabrication ;
- Parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98 % réussissent le test de sécurité ;
- 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests.

On choisit au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet réussit le test de fabrication » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de sécurité ».

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner les probabilités $P(F)$ et $P_F(S)$.
2. **a.** Construire un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé.
   b. Montrer que $P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = 0{,}2$.
3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.
4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut 0,97 arrondi au centième.
5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication ? Donner une valeur approchée du résultat au centième.

Partie B

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.
On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à 0,95.
Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication. On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}95$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n.
2. Dans cette question, on pose $n = 150$.
   a. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(S_{150} = 145)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   b. Déterminer la probabilité qu'au moins 94 % des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.
3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.
   Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \dfrac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés.
   On note $E(F_n)$ l'espérance et $V(F_n)$ la variance de la variable aléatoire F_n.
   a. Montrer que $E(F_n) = 0{,}95$ et que $V(F_n) = \dfrac{0{,}047\,5}{n}$.

b. On s'intéresse à l'évènement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93 % et 97 % ».

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à 0,96.

Exercice 2 ⋆⋆

Centres étrangers – 13 juin 2025 (Jour 2)

Combinatoire et base 64

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.
Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3. **a.** Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
   b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
   c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
   d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles. On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à* 10^{-3} *près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères.
On note X_1, X_2, X_3 et X_4 les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences.
On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire X définie en partie B.
On note $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.
Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

Exercice 3 ⋆⋆

Polynésie – 2 septembre 2025

Permis de conduire

En France il y a deux formules pour obtenir le permis de conduire :

- Suivre à partir de 15 ans une formation de conduite accompagnée pendant 2 ans;
- Suivre la formation classique (sans conduite accompagnée) à partir de 17 ans.

En France actuellement, parmi les jeunes qui suivent une formation au permis de con-duire, 16 % choisissent la formation de conduite accompagnée, et parmi eux, 74,7 % réussissent l'examen de conduite dès leur première tentative.
En suivant la formation classique, le taux de réussite dès la première tentative est seulement de 56,8 %.

On choisit au hasard un jeune français qui a déjà passé l'examen de conduite et on considère les évènements A et R suivants :

- A : « le jeune a suivi la formation de conduite accompagnée »;
- R : « le jeune a eu le permis dès sa première tentative ».

On arrondira les résultats à 10^{-3} près, si nécessaire.

Partie A

1. Dresser un arbre de probabilités modélisant cette situation.
2. **a.** Démontrer que $P(R) = 0,59664$.
   Dans la suite, on gardera la valeur 0,597 arrondie à 10^{-3} près.

   b. Donner ce résultat en pourcentage et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. On choisit un jeune ayant eu son permis dès sa première tentative. Quelle est la probabilité qu'il ait suivi la formation de conduite accompagnée?
4. Quelle devrait être la proportion de jeunes suivant la formation de conduite accompagnée si on voulait que le taux de réussite global (quelle que soit la formation choisie) dès la première tentative à l'examen de conduite dépasse 70 %?

Partie B

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée. On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

1. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,747$.
2. Calculer $P(X \geqslant 6)$. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22,53$ et $V(Y) = 9,81$.

   On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative dans cette auto-école.

   a. Exprimer Z en fonction de X et Y. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

   b. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est inférieure à 0,12.

Exercice 4 ⋆⋆

Asie – 5 septembre 2025

Loi binomiale (QCM statistique)

Dominique répond à un QCM comportant 10 questions.
Pour chaque question, il est proposé 4 réponses dont une seule est exacte.
Dominique répond au hasard à chacune des 10 questions en cochant, pour chaque question, exactement une case parmi les 4.
Pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est donc $\frac{1}{4}$.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses à ce QCM.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X et donner les paramètres de cette loi.
2. Quelle est la probabilité que Dominique obtienne exactement 5 bonnes réponses ? Arrondir le résultat à 10^{-4} près.
3. Donner l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On suppose dans cette question qu'une bonne réponse rapporte un point et qu'une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. La note finale peut donc être négative.
   On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.
   - **a.** Calculer $P(Y = 10)$, on donnera la valeur exacte du résultat.
   - **b.** À partir de combien de bonnes réponses la note finale de Dominique est-elle positive ? Justifier.
   - **c.** Calculer $P(Y \leqslant 0)$, on donnera une valeur approchée au centième.
   - **d.** Montrer que $Y = 1,5X - 5$.
   - **e.** Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Exercice 5 ⋆⋆

Amérique du Sud – 14 novembre 2025 (Jour 2)

Tennis et service

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près en cas de besoin.*
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle.
En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.
En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.

Abel est au service.
On considère les évènements suivants :

- S : « Abel réussit son premier service »
- G : « Abel gagne le point ».

1. Décrire l'évènement $\overline{S}$ puis traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(S \cap G)$.
3. Justifier que la probabilité de l'évènement G est égale à 0,695.
4. Abel a gagné le point. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi son premier service ?
5. Les évènements S et G sont-ils indépendants ? Justifier.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.
   a. Quelle est la loi suivie par X et quels sont ses paramètres ? Justifier.
   b. Calculer $P(X \leqslant 18)$.
   c. Quelle est la probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées ?
   d. Déterminer l'espérance de X.
2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,85.
   On considère la variable aléatoire

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n}$$

   a. Déterminer l'espérance et la variance de M_n.
   b. Après avoir rappelé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout entier naturel n, $P(0{,}75 < M_n < 0{,}95) \geqslant 1 - \dfrac{12{,}75}{n}$.
   c. En déduire un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0{,}75\,;\,0{,}95[$ avec une probabilité supérieure à 0,9.

Exercice 6 ⋆⋆

Nouvelle-Calédonie – 20 novembre 2025 (Jour 1)

Sac et urnes de boules

On dispose d'un sac et de deux urnes A et B.

— Le sac contient 4 boules : 1 boule avec la lettre A et 3 boules avec la lettre B.
— L'urne A contient 5 billets : 3 billets de 50 euros et 2 billets de 10 euros.
— L'urne B contient 4 billets : 1 billet de 50 euros et 3 billets de 10 euros.

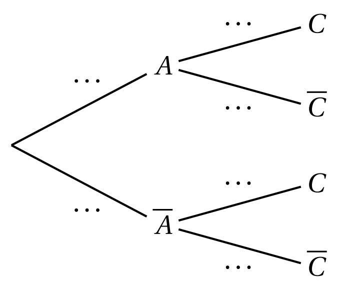
Un joueur prend au hasard une boule dans le sac :

— si c'est une boule avec la lettre A, il prend au hasard un billet dans l'urne A.
— si c'est une boule avec la lettre B, il prend au hasard un billet dans l'urne B.

On note les évènements suivants :

- A : le joueur obtient une boule avec la lettre A.
- C : le joueur obtient un billet de 50 euros.

1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre représentant la situation.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement « *le joueur obtient une boule avec la lettre* A *et un billet de* 50 € ?
3. Démontrer que la probabilité $P(C)$ est égale à 0,337 5.



4. Le joueur a obtenu un billet de 10 euros.

   L'affirmation « *Il y a plus de* 80 % *de chances qu'il ait au préalable obtenu une boule avec la lettre* B » est-elle vraie ? Justifier.

5. On note X_1 la variable aléatoire qui donne la somme, en euros, obtenue par le joueur.

   Exemple : si le joueur obtient un billet de 50 €, on a $X_1 = 50$.

   Montrer que l'espérance $E(X_1)$ est égale à 23,50 et que la variance $V(X_1)$ est égale à 357,75.

6. Après avoir remis la boule dans le sac et le billet dans l'urne où il a été pris, le joueur joue une deuxième partie. On note X_2 la variable aléatoire qui donne la somme obtenue par le joueur lors de cette deuxième partie.

   On note Y la variable aléatoire ainsi définie : $Y = X_1 + X_2$.

   a. Montrer que $E(Y) = 47$.

   b. Expliquer pourquoi on a $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$.

7. Le joueur joue d'eux-mêmes une troisième, une quatrième,. . ., une centième partie.

   On définit donc de la même façon les variables aléatoires $X_3, X_4, \ldots, X_{100}$.

   On note Z la variable aléatoire définie par $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$.

   Démontrer que la probabilité que Z appartienne à l'intervalle $]1950\ ;\ 2750[$ est supérieure ou égale à 0,75.

Exercice 7 ⋆⋆

Amérique du Nord – sujet 1, 20 mai 2026

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.

Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

— 25 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15 % ont choisi l'abonnement « Famille » ;

— 45 % des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;

— 30 % des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;

— 12 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les évènements suivants :

— E : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;

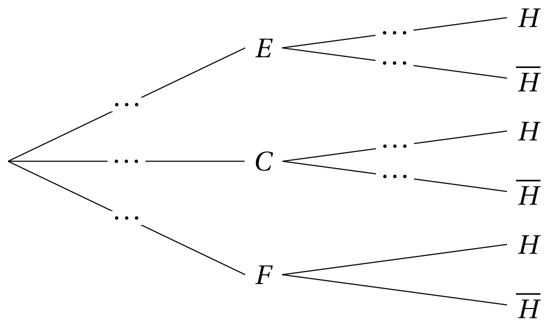
— C : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;

— F : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;

— H : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

Partie A

1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés :



2. Calculer la valeur exacte de $P(E \cap H)$.

3. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,412 5.

4. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». *On arrondira le résultat au millième.*

Partie B

On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de 0,4125.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». *On arrondira le résultat au millième.*

3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

On s'intéresse à un échantillon de n abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise.

On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».

- **a.** Démontrer que, pour tout n entier naturel non nul, $q_n = 1 - 0{,}587\,5^n$.
- **b.** Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à 99,9 %.

Partie C

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

— Abonnement « Étudiant » : 5 € par mois ;

— Abonnement « Classique » : 10 € par mois ;

— Abonnement « Famille » : 16 € par mois ;

— Option « Écoute hors-ligne » : 2 € de plus par mois, quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné.

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y.

2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut 10,475 et interpréter ce résultat dans le contexte.

4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y, arrondie au centième.

5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.

On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.

- **a.** Calculer la variance de la variable aléatoire Z.
- **b.** Un responsable affirme que, si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50 % de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.

  Justifier cette affirmation.