Livret de révision

Baccalauréat – Spécialité Mathématiques

Sujets du baccalauréat 2025

Suites

Exercice 1 ⋆⋆

Amérique du Nord – 21 mai 2025 (Jour 1)

Suite récurrente et limite

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.

2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

- **a.** Calculer a_0 et a_1.
- **b.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.
- **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geqslant 3n - 1$$

- **d.** En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

- **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.
- **b.** En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.
On considère le programme suivant écrit en langage Python :

Algorithme Python 1

```
def algo(p):
  u=2
  n=0
  while u-1>p:
    u=(2*u+1)/(u+2)
    n=n+1
  return (n,u)
```

- **a.** Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.
- **b.** Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0{,}001$.

Exercice 2 ⋆⋆⋆

Amérique du Nord – 22 mai 2025 (Jour 2)

Approximation de ln (Briggs)

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel ln(2), en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI$^{\text{e}}$ siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

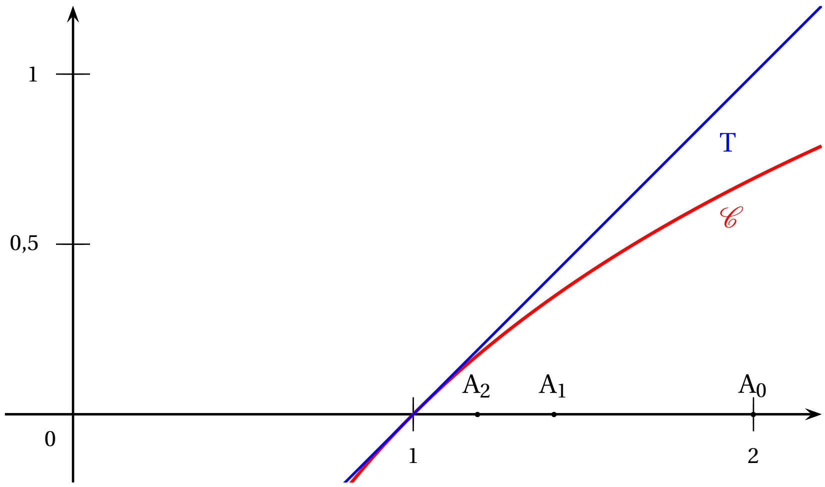
Partie A

1. **a.** Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2.
   b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
2. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.
   d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n).

Partie B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1. **a.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\quad \ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   Une équation de la droite T est $y = x - 1$.
   Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



   On décide de prendre $x - 1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\,;\,1{,}01[$.

   a. Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0{,}99\,;\,1{,}01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.
   b. En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.
   c. Déduire des questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$.
3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.
   Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.
   On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` correspond à $\sqrt{a}$.

Algorithme Python 2

```
from math import*
def Briggs(a):
  n = 0
  while a >= 1.01:
    a = sqrt(a)
    n = n+1
  L =...
return L
```

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Exercice 3 ⋆⋆

Amérique du Nord (secours) – 22 mai 2025 (Jour 2)

Suite à double récurrence

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0.
2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.
   Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 ⋆⋆

Asie – 11 juin 2025 (Jour 1)

Médicament et concentration

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.
On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.
On a $u_1 = 2$ et

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif : } u_{n+1} = 2 + 0{,}8u_n.$$

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2.
2. Montrer par récurrence que :
$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ?
   Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.
On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n.$$
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.
4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python :

```
def mystere(k) :
    n = 1
    s = 2
    while s < k :
        n = n + 1
        s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
    return n
```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

Exercice 5 ⋆⋆

Asie – 12 juin 2025 (Jour 2)

Suite géométrique auxiliaire

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 10$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 + 10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n). Justifier la réponse.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n + \dfrac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $w_1 = 44{,}5$.

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction suite.

```
def suite(n) :
    U=30
    W=45
    for i in range (1,n+1) :
        U=U/2+10
        W=W/2+U/2+7
    return W
```

2. L'exécution de suite(1) ne renvoie pas le terme w_1. Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de suite(n) renvoie la valeur du terme w_n ?

3. **a.** Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

b. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a : $0 \leqslant 10n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{10}{n}$.
Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

Exercice 6 ⋆⋆

Polynésie – 2 septembre 2025

Suite récurrente (logarithme)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2 + \ln\left(u_n^2 - 3\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` qui prend en paramètre un entier naturel `k`, renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n).

Remarque : On précise que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

Algorithme Python 3

```
def suite(k):
  L = []
  u = 5
  for i in range(......):
    L.append(u)
    u=............
  return(......)
```

2. On a exécuté `suite(9)` ci-dessous. Émettre deux conjectures : l'une sur le sens de variation de la suite (u_n) et l'autre sur son éventuelle convergence.

Algorithme Python 4

```
>>> suite(9)
[ 5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,
5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,
5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)`, ce qui a renvoyé 1.
Cet affichage contredit-il la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.

Algorithme Python 5

```
def mystere(n):
  L = suite(n)
  c = 1
  for i in range(n - 1):
    if L[i] > L[i + 1]:
      c = 0
  return c
```

Algorithme Python 6

```
>>> mystere(10000)
1
```

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right)$$

On admet que g est dérivable sur $[2\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$4 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[\,2\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = 2 + \ln\left(x^2 - 3\right) - x.$$

On admet que f est dérivable sur $[2\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On donne le tableau de variations de f suivant. On ne demande aucune justification.

x	2		3		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(6)-1$	$\searrow$	$-\infty$

1. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2\,;\,+\infty[$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.
   b. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-3} près de β.
2. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   Justifier que $f(\ell) = 0$ et déterminer ℓ.