DM ~ Quelques sommes infinies

La notion d'infini en mathématiques a toujours était source de débats et de paradoxes. Nous allons étudier dans ce devoir maison des objets que l'on appelle aujourd'hui des séries (qui sont des sommes infinies) et qui ont longtemps posées problèmes aux mathématiciens. Voici quelques réflexions qui ont parcourru l'histoire des mathématiques et qui démontrent que l'infini est une notion difficile à apprivoiser :

- « Le nombre de points sur un segment de droite est-il fini ou infini ? Si le nombre de points est infini, le fini peut contenir l’infini. Ce qui est paradoxal. »
- « Il serait ridicule que nous, qui sommes finis, entreprissions d’en [de l’infini] déterminer quelque chose, et par ce moyen le supposer fini en tâchant de le comprendre; c’est pourquoi nous ne nous soucierons pas de répondre à ceux qui demandent si la moitié d’une ligne infinie est infinie, et si le nombre infini est pair ou non pair, et d’autres choses semblables, à cause qu’il n’y a que ceux qui s’imaginent que leur esprit est infini qui semblent devoir examiner telles difficultés ».
- « Puisque l’univers a existé de tout temps, le nombre de fois que le Soleil et les planètes ont fait le tour de la Terre est infini. Cependant, la rotation du Soleil est plus rapide que celle des planètes. Il existe donc des infinis plus grands que d’autres, ce qui est impossible ».

1 - Découpage de l'unité

Soit $[A_0B]$ un segment de longueur 1 et A_1 son milieu. On considère de plus A_2 le milieu de $[A_1B]$, puis A_3 celui de $[A_2B]$, et pour tout entier n, on définit le point A_{n+1} comme le milieu de $[A_nB]$.

On définit les suites (ℓ_n) et (s_n) pour tout entier n par : $\ell_n = A_nA_{n+1}$ et $s_n = A_0A_n$.

1. Déterminer ℓ_0, ℓ_1 et ℓ_2.
2. Déterminer s_0, s_1, s_2 et s_3.
3. Quelle est la nature de la suite (ℓ_n) ? Donner l'expression de ℓ_n en fonction de n.
4. Exprimer s_3 en fonction de ℓ_0, ℓ_1 et ℓ_2.
   En déduire, pour tout entier $n \geq 1$ l'expression de ℓ_n en fonction d'une somme écrite à l'aide du symbole $\sum$.
5. Déterminer l'expression de s_n en fonction de n.
6. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$.
7. Robert Grosseteste (vers 1168 - 1253) explique un passage d'un texte d'Aristote en écrivant : « [Aristote] ajoute encore que l’infini par division est en quelque manière le même que l’infini par addition. En effet, comme la ligne entière est divisée en deux moitiés, et de nouveau la moitié en deux moitiés, et ainsi de suite indéfiniment, à mesure que la division est multipliée, ainsi l’addition à ce qui a été pris auparavant [se poursuit] toujours. Et en effet, dans la première division on prend une moitié ; dans la deuxième division, une moitié et un quart ; dans la troisième, une moitié et un quart et un huitième. Et ainsi, de même que la division [se poursuit] indéfiniment, de même [se poursuit] indéfiniment l’addition, et ce qui est pris croît toujours indéfiniment ; et cependant une telle addition ne produira jamais par agrégation [des termes] une grandeur infinie. »
   Faire le lien entre les propos de Robert Grosseteste et la question précédente.

2 - Un paradoxe de Zénon d'Elée

Zénon d'Elée est un philosophe grecque du V^{e} siècle avant J.-C. dont le nom est resté attaché à plusieurs paradoxes concernant la notion d'infini. Aristote introduira les notions d'*infini en acte* et d'*infini en puissance* pour essayer de lever les contradictions introduites par Zénon. Comme nous l'avons vu dans la partie 1, les discussions sur ces notions durèrent encore quelques siècles après eux.
Voici un des paradoxes énoncés par Zénon d'Elée :

> Achille en pleine course ne pourra jamais rattraper une tortue marchant devant lui, car il devra avant tout atteindre le point de départ de cette dernière. Or, quand il aura atteint ce point, la tortue aura avancé ; il lui faudra alors atteindre sa nouvelle position, et lorsqu'il l'aura atteinte, la tortue aura de nouveau avancé, etc. La tortue sera donc toujours en tête.

On note $L > 0$ la distance qui sépare Achille de la tortue à l'instant $t = 0$.
On note de plus v_A et v_T les vitesses (constantes) respectives d'Achille et de la tortue. On suppose que $v_A > v_T$.
Soient enfin, $d_A(t)$ et $d_T(t)$ les distances parcourues respectivement par Achille et la tortue à l'instant t.

1. Soit n un entier naturel. Décomposons les étapes du parcours d'Achille comme le propose Zénon en notant a_n la distance parcourue par Achille entre deux déplacements.
   On a donc $a_0 = 0$ et $a_1 = L$.
   On note de plus t_n le temps mis par Achille pour parcourir la distance a_n.
   Et on définit la suite s_n pour tout entier n par : $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.
   a. Exprimer t_1 en fonction de a_1 et de v_A.
   b. En déduire que $a_2 = \frac{v_T}{v_A} a_1$.
   On utilisera le fait que a_2 représente la distance parcourue par la tortue dans le laps de temps t_1.
   c. En effectuant le même raisonnement que dans les questions précédentes mais à l'étape n, démontrer que la suite (a_n) est géométrique. On précisera sa raison.
   d. Expliquer ce que représente la suite (s_n) par rapport à Achille.
   e. Déterminer l'expression de s_n en fonction de n.
   f. Calculer $\lim_{n \to +\infty} s_n$ et donner une réponse à Zénon.

2. On cherche à vérifier dans cette question le résultat précédent de manière plus classique sans passer par le raisonnement de Zénon.
   a. Exprimer $d_A(t)$ en fonction de v_A et de t.
   b. Exprimer $d_T(t)$ en fonction de v_T, de L et de t.
   c. Résoudre l'inéquation $d_A(t) \geq d_T(t)$.
   d. En déduire l'instant où Achille rattrape la tortue ainsi que la distance parcourue à cet instant.

3 - La série harmonique et Nicolas Oresme

Nicolas Oresme (vers 1320 - 1382) est un des grands esprits européens du XIV$^{\text{e}}$. Il a traité de nombreux sujets (économie, philosophie, physique, physique naturelle, musicologie, mathématiques) et à étudier également les problèmes de sommes infinies qu'il appelle « tout ».
Il étudia en particulier la série harmonique qui est la somme de tous les inverses d'entiers naturels.

Pour tout entier $n \geq 1$ on note : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Donner à 10^{-3} les valeurs de H_1, H_2, H_3 et H_4.
2. Compléter l'algorithme suivant pour que la fonction *H* qu'il définit, retourne les valeurs de $H(n)$ pour tout $n \geq 1$.

```
def H(n):
    h = 1.0
    for i in range(,n):
        h = h+
    return h
```

3. En exécutant cet algorithme donner une valeur approchée à 10^{-5} de H_{1000}.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
5. Comparer, pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{n+k}$ et $\frac{1}{2n}$.
   En déduire que pour tout entier n, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
6. Nicolas Oresme arrivant lui aussi à ce stade de calculs (mais écrit autrement bien-sûr) affirme alors :
   « il y a ici, dit-il, une infinité de parties dont chacune sera plus grande que la moitié d'un pied, donc le tout sera infini. »
   Quelle conclusion tire-t-il alors pour ce que nous notons $\lim_{n \to +\infty} H_n$?

Remarque
Le raisonnement d'Oresme est remarquable à deux points vus :

- il raisonne sur la somme de la série considérée a priori, avant même de savoir si elle est finie ou infinie;
- le résultat était non trivial car on peut démontrer que pour que H_n dépasse 100 il faut que $n \geq 10^{43}$. N'essayer pas avec l'algorithme précédent, la boucle *for* risque de s'exécuter dans un temps très long.